MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

A. X.
A LOGARLÉC

ÍRTA:
DR. NAGY SÁNDOR † HÖCK BÉLA

TANKÖNYVKIADÓ

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

★

SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK



TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1965

A MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. Középiskolai matematika (Negyedik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Második kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Harmadik kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Harmadik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész)
A. V.** Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Második kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása
A. VIII. Taylor-sorok (Második kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Harmadik kiadás)
A. X.* A logarléc (Negyedik kiadás)

B.

B. I., II., III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők) (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Harmadik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Harmadik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények
C. II. Variációszámítás
C. III. Integrálegyenletek
C. IV. Mátrixszámítás. Matematikai programozás (Második kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás
C. VI. Matematikai összefoglaló (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk)

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

A. X.*

A LOGARLÉC

ÍRTA:

DR. NAGY SÁNDOR†
EGYETEMI DOCENS

HOCK BÉLA
OKLEVELES MÉRNÖK

NEGYEDIK, JAVÍTOTT KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1965

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:

DR. SZMODITS KÁZMÉR
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

KORRIGÁLTA:
SZABÓ ISTVÁN
KÖZÉPISK. TANÁR

KIADÁSÁT
A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTER
RENDELTE EL

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása a műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kíván. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült a rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben,* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismeteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt,* megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból,* sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. villamosmérnök kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről,* mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak,* különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek,* amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve, az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen, az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplínáját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan módon modern alkalmazási területű és e miatt mindinkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. I—II—III., B. IV. és B. VII.

Az említett második kiadások igen gyors elfogyása, éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, illetve a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni, és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a minisztérium, a kiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. február 15. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

E munka a logaritmikus számolóléc használatára kívánja az olvasót megtanítani. Előismeretet alig tételez fel. Egyaránt tekintettel akar lenni a kezdő műegyetemi hallgatóra és technikusra, akit még a legegyszerűbb műveletek elvégzésével is meg kell ismertetni, valamint a műszaki gyakorlat emberére, aki a logaritmusléccel való számolásnak minél több lehetőségét ki akarja használni.

A könyv megértését jó szemléltetéssel is biztosítani kívántuk. E törekvésünkben nagy segítséget nyújtott *Gyurcsy Endre* kartárs; ugyancsak ő volt szíves magára vállalni a 7. §. összeállítását.

E mű megírásánál az idevágó és számunkra hozzáférhető külföldi szakirodalom mellett a saját oktatási és praxisbeli tapasztalatainkat is értékesíteni kívántuk.

Köszönettel tartozunk főszerkesztőnknek, *Fazekas Ferenc* kartársnak e munka folyamán adott különféle tanácsaiért, valamint *Szmodits Kázmér* kartársnak, aki a lektorálás során számos hasznos észrevétellel volt segítségünkre. Hálásan emlékezünk meg az Oktatásügyi Minisztériumról, valamint a Tankönyvkiadó Vállalatról munkánk támogatásáért, végül, de nem utolsósorban az Egyetemi Nyomda dolgozóiról derék munkájukért.

Budapest, 1954. december hó 21.

Dr. Nagy Sándor

Hock Béla

ELŐSZÓ A KÖTET HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1954 óta e kis könyv első és második kiadása teljesen elfogyott. A második kiadás majdnem változatlan utánnyomás volt. Jelen harmadik kiadásban, amelyet szerzőtársam sajnálatosan már nem érhetett meg, sor került az időközben észrevett értelemzavaró hibák, elírások kijavítására.

Ez alkalommal is köszönetet mondok *Fazekas Ferencnek*, a sorozat szerkesztőjének munkám messzemenő támogatásáért.

Budapest, 1962. május 1.

Hock Béla

ELŐSZÓ A KÖTET NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

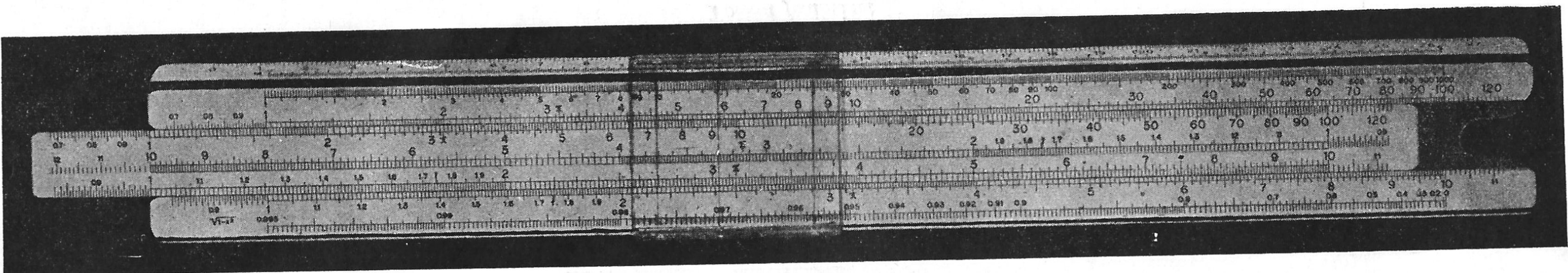
Az új kiadás megegyezik az előzővel.

Örömömre szolgál, hogy könyvecskénk immár negyedízben állhat a műszakiak szolgálatára.

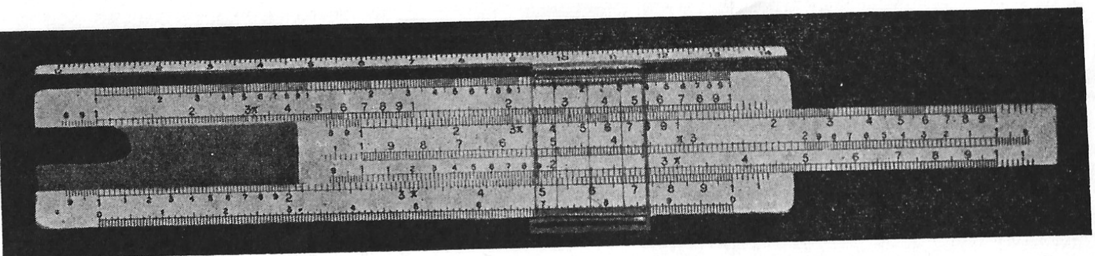
Budapest, 1964. márc. 15.

Hock Béla

Normál „Gamma" logarléc

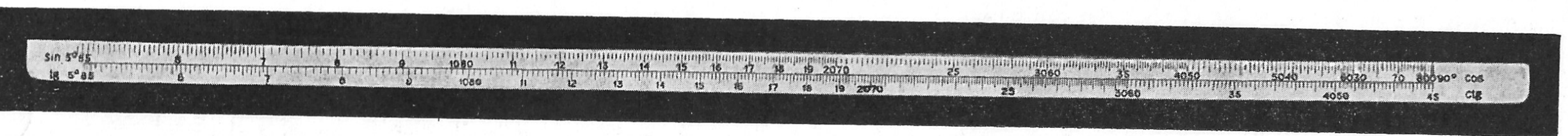


Kis „Gamma" logarléc

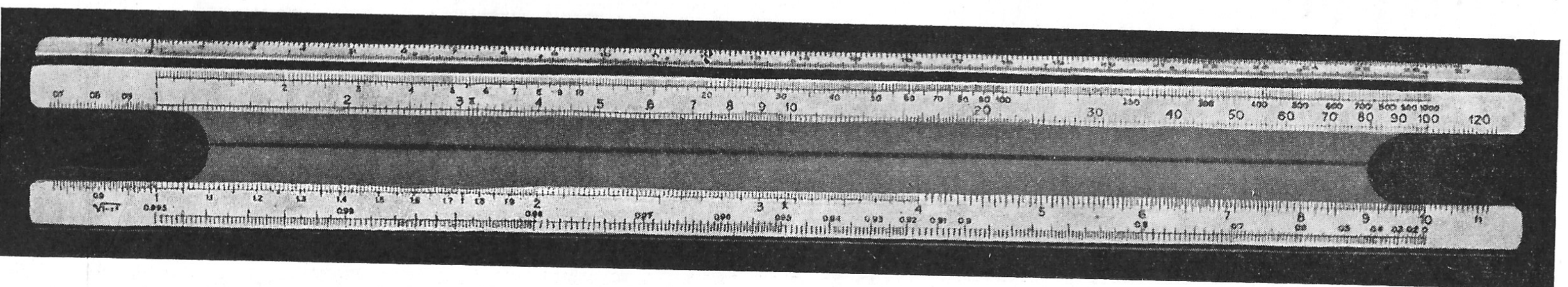


1. ábra

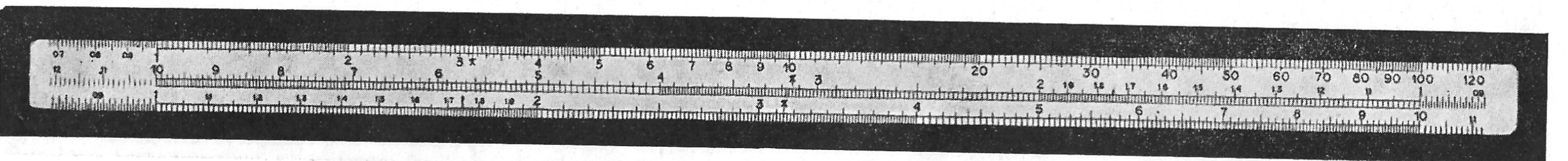
Normál „Gamma" logarléc



Léc oldalnézet



Léc felülnézet



Tolóka felülnézet

2. *ábra*

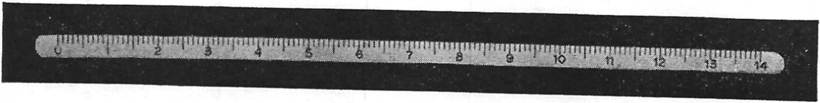
Léc alulnézet

Léc 2. oldalnézet

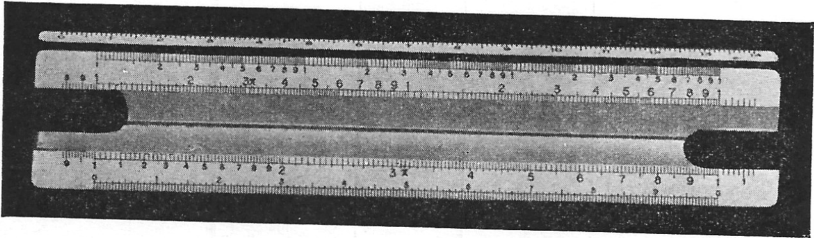
Tolóka alulnézet

3. ábra

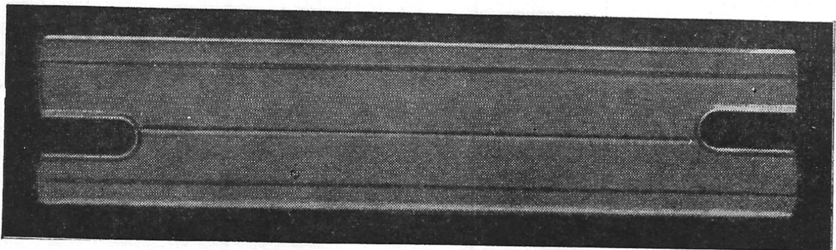
Kis „Gamma" logarléc



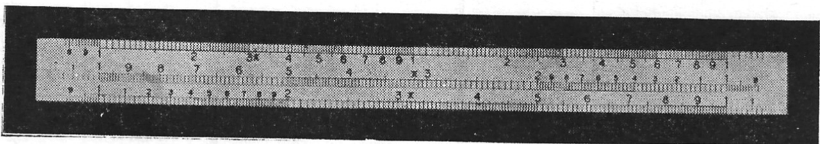
Léc oldalnézet



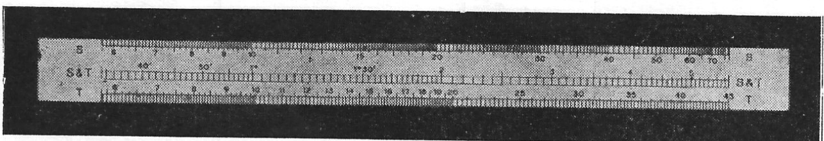
Léc felülnézet



Léc alulnézet



Tolóka felülnézet



Tolóka alulnézet

4. ábra

E KÖTET

TARTALOMJEGYZÉKE

1. §. A LOGARLÉCRŐL ÁLTALÁBAN

a) A logarléc szerkezete

A *logarléc* a műszaki életben használatos numerikus műveletek alig nélkülözhető segédeszköze. Használata kellő gyakorlat után kényelmes és gyors, az általa nyújtott pontosság a legtöbb gyakorlati célra teljesen elegendő.

A logarléc *anyaga* rendszerint nemesebb fa, újabban fém vagy műanyag. Az anyag megválasztásánál lényeges szempont, hogy a léc hőokozta alakváltozása minimális legyen. A lécet általában celluloid lapokkal borítják. A beosztásokat erre a burkolatra speciális osztógéppel vésik rá. A jó minőségű lécen a beosztások élesek, jól megkülönböztethetők, és nem kopnak le.

Logarlécek különféle *méretekben* készülnek. A logarléc hosszán az alapskála két szélső beosztásának egymástól való távolságát értjük a csonka beosztások figyelmen kívül hagyásával. (A csonka beosztás fogalmát lásd a 14. oldalon.) Ez a gyakorlatban leginkább elterjedt léceknél 250 mm (normálléc). Alkalmazzák ennek a felét, tehát 125 mm-t (zsebléc), sőt, kisebb léceknél a negyedét. nagyobbaknál a két-, három-, sőt négyszeresét is.

Mérnöki számításokra általában a *normállécet* használjuk. Ennél nagyobb léc használata — noha nagyobb pontosságot nyújt — kényelmetlen. *Zsebléccel* — az elérhető kisebb pontosság miatt — általában csak tájékoztató számításokat végzünk. Az 50 cm-es lécet rendszerint csak kutatómunkánál használják. Az 50 cm-nél nagyobb léc általában oktatási (demonstrációs) célra szolgál.

A logarlécnek *három fő szerkezeti része* van (1—4. ábra).

1°. A tulajdonképpeni *léc,* amely két különálló, rúgókkal összekapcsolt darabból készül. Ez a rugalmas kapcsolat teszi lehetővé a tolóka könnyű mozgathatóságát a léc esetleges kisebb vetemedése esetén is.

2°. A *tolóka* (nyelv), amely a léc hornyaiban csúsztatható.

3°. A *futó,* egy a léc mindkét oldalát átfogó és a léc egész hossza mentén szabadon eltolható keretbe foglalt kis ablakocska. Erre vékony vonal — továbbiakban *index* (hajszálvonal) — van rákarcolva.*

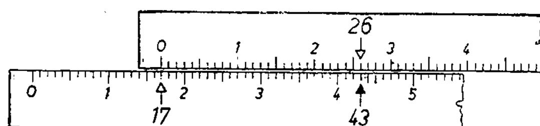
Az index célja az, hogy vele az álló vagy mozgó skála valamelyik helyét a számítás egy lépésének tartamára rögzíteni (vagy más szóval beállítani), valamint leolvasni tudjuk. Index használata nélkül ezen műveletek rendszerint csak a szem megerőltetésével és nem kielégítő pontossággal volnának elvégezhetők. Számolás közben az indexnek mindig merőlegesnek kell lennie a hosszanti tengelyre. Az indexnek ilyen helyzetét egy rúgó biztosítja, amely a futót a léc megfelelő hornyához szorítja oda.

* A legtöbb lécen nem egy, hanem *három hajszálvonal* látható az ablakocskán. A továbbiakban egyelőre kizárólag a középső hajszálvonalat használjuk, míg a két szélső hajszálvonal szerepét később (a 67. oldalon) világítjuk meg.

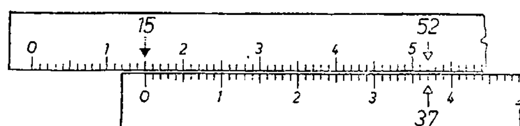
b) A logarléc skálái (beosztásai)

A logarléc fő beosztásai nem egyenletesek, hanem logaritmikusak.

Az *egyenletes beosztás* úgy készül, hogy valamely kezdőpontból kiindulólag a különböző számokkal arányos távolságokat mérünk fel. Ha pl. 1 egységet 1 cm-rel veszünk egyenlőnek, akkor pl. a 3-nak megfelelő beosztás távolsága a kezdőponttól (0-tól) éppen 3 cm lesz, a 6-é 6 cm, 9-é 9 cm. A kétszeres, háromszoros stb. számértéknek tehát a kezdőponttól mérve kétszeres, háromszoros távolságok felelnek meg. Az így elkészített egyenletes beosztású skálával azonban közvetlenül csak az összeadás és kivonás műveletét tudnók elvégezni (5—6. ábra).

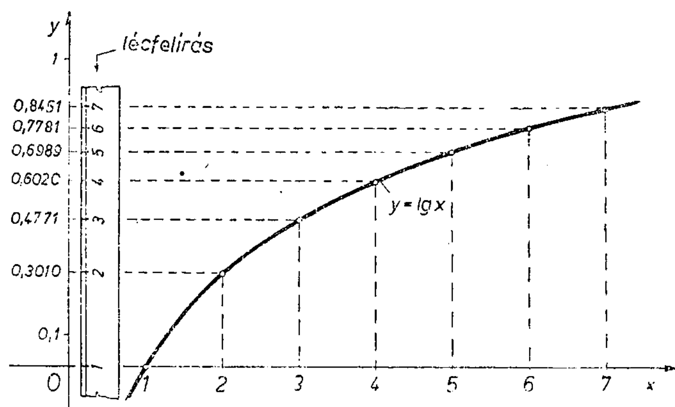


5. ábra



6. ábra

A *logaritmikus beosztás*nál nem az egyes számokkal, hanem azok logaritmusaival (pontosabban e számértékek 10 alapú logaritmusainak mantisszájával) arányos távolságokat mérünk fel ugyanazon kezdőponttól kiindulólag, de ezek végpontjaihoz *nem e számok logaritmusait, hanem magukat a számokat írjuk oda* (7. ábra). A kezdőpont



7. ábra

— az egyenletes beosztással ellentétben — itt sem 0-sal, hanem 1-gyel van jelölve, ugyanis lg 1 = 0, azaz az 1 egységnek megfelelő hossz 0-sal egyenlő, tehát az 1 egységgel jelzett pont beleesik a kezdőpontba.

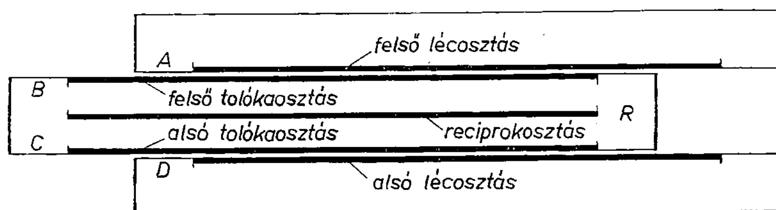
Önként adódik a kérdés, hogy *hogyan ábrázoljuk* a 10-nél nagyobb számok logaritmusait. Tekintettel arra, hogy pl. 174,5, 17,45, 0,001 745, 174 500 000 stb. számok 10 alapú logaritmusa csupán egész jegyeiben — a karakterisztikában — különbözik,

e logaritmusok közös mantisszájuknak megfelelő távolsággal ábrázolhatók.* Ennek megfelelően a logaritmus skálán való ábrázolásnál, beállításnál, illetve leolvasásnál nem törődünk a számok *helyértékével*, hanem csak a számjegyekkel és ezek sorrendjével; a helyértéket a műveletek elvégzése előtt vagy után külön vesszük figyelembe (lásd a 16. oldalon).

Az alábbiakban a hazánkban leginkább elterjedt 250 mm és 125 mm hosszúságú *„GAMMA" normál-, illetve zsebléc osztásait ismertetjük.* Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a logarléc osztásainak megismerése és helyes leolvasása alapja a logarléccel való számolásnak. Éppen ezért fokozott jelentősége van a következő oldalak alapos áttanulmányozásának és begyakorlásának.

Az alapműveletek elvégzése szempontjából *legfontosabbak* a 8. ábrán *A, B, C, D, R* betűkkel megjelölt *skálák.*

A skálák helyes megismerése céljából húzzuk ki a tolókát a lécből. A *tolóka* homloklapján három egymástól különböző beosztás van: a tolóka felső széle mentén (*B* skála), közepén (*R* skála) és az alsó széle mentén (*C* skála). Ha a tolókát a lécbe visszacsúsztatjuk, megfigyelhetjük, hogy a lécen magán is van két olyan skála, amely a tolóka megfelelő skálájával teljesen azonos. A *lécnek* a tolóka felső éle melletti beosztása (*A* skála) azonos a tolóka felső beosztásával (*B* skálával), a lécnek a tolóka alsó éle melletti beosztása (*D* skála) pedig azonos a tolóka alsó beosztásával (*C* skálával).



8. ábra

Betűjelölés helyett használatosak a skáláknak a következő elnevezései is: *felső lécosztás (A), felső tolókaosztás (B), alsó tolókaosztás (C), alsó lécosztás (D), reciprok osztás (R)* (8. ábra).

Itt említünk meg néhány elnevezést is. A tolóka *alapállásának* azt a helyzetet nevezzük, amikor az *A* és *B*, illetve *C* és *D* skálák megfelelő osztásvonalai egy egyenesbe esnek. A tolóka úgynevezett *jobb oldali állásánál* az jobb felé áll ki a lécből, *bal oldali állásánál* pedig bal felé.

Az A, B, C, D skálák osztásközei a logaritmikus beosztásnak megfelelően balról jobbra kisebbednek. Következésképpen nem minden osztás alosztásköze ugyanakkora.

A normállécen az alsó tolókaosztás *(C)* és az alsó lécosztás *(D)* a következő szerkezetű: az osztások 1, 2, ..., 9, 10 számokkal vannak megjelölve; 1 és 2 között tíz alosztást találunk; ugyanitt minden alosztás újra tíz részre van osztva; 2 és 4 között megjelölt tizedek már csak öt részre vannak továbbosztva; 4 és 10 közötti részen a tizedek felezve vannak.

A felső léc- és tolókaosztások félakkorák, mint az alsók. Ezért az alosztások is módosulnak. Normállécnél 1 és 2 között megjelölt tizedek öt részre vannak osztva; 2 és 5 között a tizedek felezve vannak; 5 és 10 között csak a tizedek vannak megjelölve.

* Általánosságban minden szám (*b*) átalakítható 10 valamilyen egészkitevőjű hatványának (*k*) és valamely 1 és 10 közé eső számnak (*a*) a szorzatává. Ennek felhasználásával: $\lg b = \lg (10^k a) = k + \lg a$.

A zseblléc alsó léc- és tolókabeosztása egészében is, részleteiben is megegyezik a normálléc felső léc- és tolókaosztásával. A felső léc- és tolókaosztás a következő szerkezetű: 1 és 3 között minden tized felezve van; 3 és 6 között a tizedek vannak jelölve; 6 és 10 között minden egység öt részre van osztva.

A reciprok skálán a számok reciprokának logaritmusait ábrázoljuk. A $\lg \frac{1}{a} = \lg 1 - \lg a = -\lg a$ azonosság alapján nyilvánvaló, hogy a reciprok skála beosztása csak abban tér el az alsó skálák beosztásától, hogy ezen a számok logaritmusait kifejező távolságok felmérése *jobbról balra* történik, és a számozás is ilyen irányban halad.

A fent leírt beosztások az alaphosszon túl mindkét irányban egy kisebb szakaszon folytatódnak. E skálameghosszabbítás úgynevezett *csonka skála* rendeltetésével a szorzás műveletének elvégzésénél ismerkedünk meg.

A logarlécen előforduló további skálák leírását a megfelelő műveleteknél tárgyaljuk.

c) A logarléc beállítása és leolvasása

A logarléccel végezhető műveletek lényegében *beállítások és leolvasások sorozatából* állanak.

Beállítás alkalmával a futó indexét a kívánt osztással fedésbe hozzuk. A leolvasás alkalmával viszont az index helyének megfelelő számot állapítjuk meg. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a logaritmusskála szerkezetére való tekintettel beállításnál, illetve leolvasásnál csak a számjegyeket s azok egymásutánját vesszük figyelembe a helyérték figyelmen kívül hagyásával. A *helyértéket* a műveletek elvégzése előtt vagy után külön kell figyelembe venni (lásd bővebben a 16. oldalon).

Beállításnál, illetve leolvasásnál a gyakorlatlan számoló igen könnyen követ el hibát. Leggyakrabban a következő *tévedések* fordulnak elő:

1°. Az öt részre beosztott alosztásokkal úgy számol, mintha az tíz részre lenne osztva; pl. 3,2,2 helyett 3,2,4-et állít be, illetve 3,2,2 helyett 3,2,1-et olvas le;

2°. A második helyen álló zérust a leolvasásoknál vagy beállításoknál kifelejti; pl. 1,0,4 helyett 1,4-et állít be, illetve 1,0,4 helyett 1,4-et olvas le;

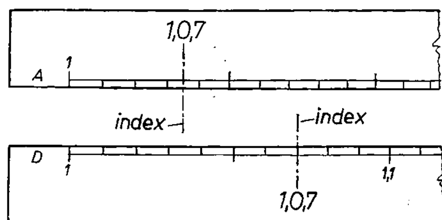
3°. Az *R* skála használatakor megfeledkezik arról, hogy ennek a skálának a számozása a többivel ellentétes irányú; 4,3,1 helyett 3,6,9-et olvas le.

Ezek a szokásos hibák csak kellő *gyakorlat*tal küszöbölhetők ki.

Az alábbi *két példán* mutatjuk be a beállítás és leolvasás műveletét.

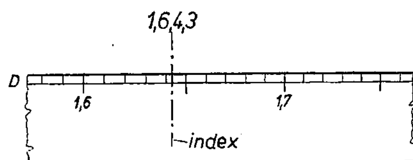
1. Állítsuk be a normálléc *D*, illetve *A* skáláján az 1,0,7 értéket.

A *D* skálán a fenti számnak megfelelő beosztást pontosan megtaláljuk (9. ábra). Az *A* skálán az utolsó számjegyet (7-et) az 1,0,6 és 1,0,8 közötti távolság becslés alapján történő felezésével állítjuk be.



9. ábra

2. Olvassuk le a 10. ábráról az index állását.



10. ábra

Az index az 1,6 osztást követő negyedik és ötödik alosztás közötti távolságot körülbelül harmadolja. Tehát a leolvasás 1,6,4,3-at eredményez.

Feladatok

1. Állítsuk be

a normálléc *D* skáláján 6,8,2-t, illetve 7,3,6-ot,
a normálléc *A* skáláján 1,8,5-öt, illetve 2,0,3-at,
a normálléc *R* skáláján 3,9,1-et, illetve 4,1,6-ot,
a zsebléc *D* skáláján 8,3,3-at, illetve 9,1,8-at,
a zsebléc *A* skáláján 2,8,6-ot, illetve 3,5,8-at,
a zsebléc *R* skáláján 4,8,4-et, illetve 5,3,2-t.

Vizsgáljuk meg minden beállításnál, hogy mely számjegyek állíthatók be pontosan, és melyek csak becslés alapján!

2. Toljuk lécünk indexét tetszőleges helyre, és olvassuk le az index által megjelölt értékeket az *A, B, C, D, R* skálákon! Ismételjük meg a fenti műveletet néhányszor más és más indexállás mellett!

3. Állítsuk rá a *C* skála 1-esét a *D* skála 2,0,5 értékére! Milyen számjegyeket olvashatunk le a *D* skálán a *C* skála 3,8,6 osztása alatt?

4. Állítsuk be a *D* skálán 5,2,3 értékét; toljuk e fölé a *C* skála 1,4,5 osztását! Milyen számot olvashatunk le a *C* skála 1-ese alatt a *D* skálán?

5. Hozzuk a lécet alapállásba! Állítsuk be a *D* skálán 6,4,9 értékét! Mit olvashatunk le az *R* skálán az index ilyen állása mellett?

6. Állítsuk be a *D* skálán a 8,5,6 értékét! Mit olvashatunk le az *A* skálán az index ilyen állása mellett?

2. §. SZORZÁS, OSZTÁS LOGARLÉCCEL

a) A helyérték megállapítása

Az alapműveletek elvégzése végeredményben *kép lépés*ből áll. Az első a helyérték meghatározása, a második a művelet tulajdonképpeni elvégzése. (Fordított sorrendben is eljárhatunk!) A helyértéket a leolvasásnál éppúgy nem adja meg a léc, mint a beállításnál sem veszi figyelembe. Vannak ugyan erre vonatkozó szabályok, de ezek nehezen sajátíthatók el, és igen sok tévedésre adnak alkalmat.

Jól bevált módszer *a helyérték meghatározásá*ra: kikerekített számokkal (pl. $1{,}45 \cdot 3{,}14$, kikerekítve $1{,}5 \cdot 3$), valamint 10 egészkitevőjű hatványai segítségével (pl. $0{,}02 \cdot 0{,}3 = 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1} \cdot 3 = 10^{-3} \cdot 6 = 0{,}006$) számolva — egyszerűbb esetben fejben — a keresett eredményt nagyságrendileg megbecsüljük.

b) Szorzás

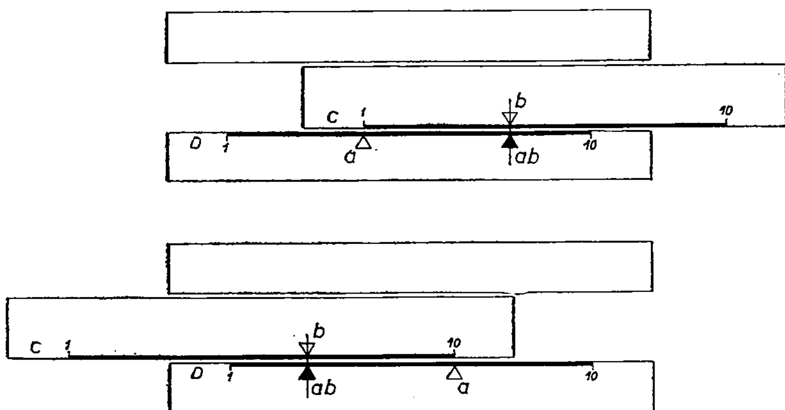
A szorzás műveletének elvégzése a szorzat logaritmusára vonatkozó

$$\log ab = \log a + \log b$$

azonosságon alapul. Ennek segítségével szorzás helyett a tényezők logaritmusának grafikus összeadását végezzük el. A szorzás művelete elvégezhető mind az alsó, mind a felső skálák segítségével.

α) **A C és D skálával** | Szorzás elvégzése az alsó beosztások útján, a *C* és *D* skálák felhasználásával a következő *lépések*ben történik (11. ábra):

Megbecsüljük a szorzat nagyságrendjét.



11. ábra

A *D* skálán a futó indexe segítségével beállítjuk az egyik tényezőt (*a*-t).

A tolókát jobb felől addig húzzuk kifelé, amíg a *C* skála 1-ese fedésbe kerül az indexszel. (Vigyázzunk, hogy e művelet közben az index ne mozduljon el!)*

Az indexet helyzetéből elmozdítva a *C* skálán felkeressük vele a másik tényezőt (*b*-t).

A *D* skálán leolvassuk az index állását.

Abban az esetben, ha a tolókán a *C* skálán *a másik tényező a lécen kívülre kerül*, a tolókát nem jobb felé, hanem bal felé toljuk ki a lécből (11. ábra), és nem a *C* skála 1-esét, hanem a *C* skála 10-esét hozzuk fedésbe az indexszel.

Hogy *a szorzást* valamely esetben *a tolóka jobb oldali vagy bal oldali állása mellett kell-e elvégezni,* azt a szorzat úgynevezett *redukált értéke* alapján lehet rendszerint eldönteni. Ezt úgy kapjuk meg, hogy a két tényezőnek első számjegyeit szorozzuk össze (ha a második számjegy 5 vagy 5-nél nagyobb, akkor igazítást veszünk, vagyis az első számjegyet 1-gyel növeljük). Ha a redukált érték 10-nél kisebb, akkor jobb oldali, ha 10-nél nagyobb, akkor bal oldali tolókaállással kell a szorzat értékét meghatározni.

Némi *gyakorlat* után — az esetek többségében — azonnal, a redukált érték meghatározása nélkül is tudjuk, hogy a tolókát bal felé vagy jobb felé kell kitolnunk. Csupán azon esetekben van szükségünk a redukált érték meghatározására, amikor a szorzat redukált értéke 10 körül van. Tévedésnek is ilyen esetekben vagyunk leginkább kitéve. Ekkor van segítségünkre a logarlécen a rendes beosztás előtt és után látható (rendszerint piros színű) beosztás-meghosszabbítás, az úgynevezett *csonka skála,* amely lehetővé teszi, hogy jobb oldali tolókaállás mellett akkor is megkaphassuk a szorzat értékét, amikor a tolókát tulajdonképpen bal felé kellett volna kitolnunk és fordítva, bal oldali tolókaállás mellett is megkaphassuk a szorzat értékét, amikor a tolókát tulajdonképpen jobb felé kellett volna kitolnunk. Természetesen ez csak akkor áll fenn, ha a redukált érték megbecslésénél elkövetett hiba nem volt túlságosan nagy mértékű. Nagyobb hiba esetén a szorzat értéke ugyanis a meghosszabbított skálán is túlesik.

Ha a szorzást a logarléc főskáláin (a *C* és *D* skálákon) végezzük, akkor — mint láttuk — a tolókának hol a jobb, hol a bal állását kell a szorzás elvégzésére felhasználnunk. E körülmény a szorzás műveletét *kissé nehézkes*sé teszi. Ezen a nehézségen *két módon segíthetünk:*

a felső skálák (*A* és *B* skálák; lásd a következő *β* pontot) vagy

a reciprok skála felhasználásával (lásd a 22. oldalon).

Példák

1. Mivel egyenlő 20,8 · 3,6?

A számítást az alsó skálákon végezzük el. A tényezőket kikerekítve a szorzat nagyságrendjét megbecsüljük (20 · 4 = 80); a *D* skálán a futó indexe segítségével beállítjuk 2,0,8-at; a *C* skála 1-es osztását fedésbe hozzuk az indexszel; a *C* skálán az indexszel felkeressük 3,6-ot; a *D* skálán leolvassuk az index állását, 7,4,9-et. A szorzat értéke az előbbi becslés figyelembevételével: 74,9.

* Az egyik tényező beállítását az index felhasználása nélkül, közvetlenül is elvégezhetjük. Ilyenkor a *C* skála 1-es vagy 10-es osztását használjuk indexként.



2. Mivel egyenlő $720 \cdot 0{,}54$?

A számítást az alsó skálákon végezzük el. A feladat megoldása az előző példához hasonló módon történik. A szorzat nagyságrendjét kerekítéssel és 10 egészkitevőjű hatványai segítségével megbecsüljük ($720 \cdot 0{,}54 = 7{,}2 \cdot 10^2 \cdot 0{,}54 \approx 7 \cdot 10^2 \cdot 0{,}5 = 3{,}5 \cdot 10^2 = 350$); a D skálán a futó indexe segítségével beállítjuk 7,2-t; a C skála 10-es osztását (a redukált érték nagyobb 10-nél) fedésbe hozzuk az indexszel; a C skálán az indexszel felkeressük 5,4-et; a D skálán leolvassuk az index állását 3,8,9-et. A szorzat értéke az előbbi becslés figyelembevételével: 389.

3. Mekkora a $V = 1{,}25\ \mathrm{m}^3$ köbtartalmú oltott mész súlya, ha fajsúlya $\gamma = 1{,}2\ \mathrm{Mp/m^3}$?

$$G = \gamma V = 1{,}2 \cdot 1{,}25 = 1{,}5\ \mathrm{Mp}.$$

4. Egy $r = 8{,}26$ m-es emelőkar végén $P = 70{,}2$ kp erő hat. Mekkora az erő forgató nyomatéka?

$$M = Pr = 70{,}2 \cdot 8{,}26 = 580\ \mathrm{mkp}.$$

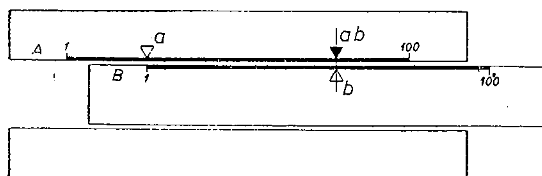
Feladatok

Végezzük el az alábbi szorzásokat az alsó skálákon!

1. $45 \cdot 443$.
2. $0{,}021 \cdot 0{,}78$.
3. $62{,}5 \cdot 1{,}67$.
4. $6380 \cdot 582$.

β) **Az A és B skálával** Szorzás elvégzése a felső beosztások útján az A és B skálák felhasználásával a következő *lépések*ben történik (12. ábra):

Megbecsüljük a szorzat nagyságrendjét.



12. ábra

Az A skála bal oldali részén a futó indexe segítségével beállítjuk az egyik tényezőt (a-t).

A tolókát jobb felől addig húzzuk kifelé, amíg a B skála 1-ese fedésbe kerül az indexszel.

Az indexet helyzetéből elmozdítva a B skálán felkeressük vele a másik tényezőt (b-t).

Az A skálán leolvassuk az index állását.

A felső beosztások használatának *előnye,* hogy a tolókát mindig csak egyik irányba, jobbra kell kitolnunk; *hátránya,* hogy a rövidebb skála miatt a számítás pontatlanabb, mint az alsó beosztások használatánál.

Megemlítjük, hogy a kezdő számára jó ellenőrzési lehetőség nyílik a szorzat tényezőinek felcserélhetőségében.

Példák

1. Mivel egyenlő $0{,}079 \cdot 3140$?

A számítást a felső skálákon végezzük el. A szorzat nagyságrendjét kerekítéssel és 10 egészkitevőjű hatványai segítségével megbecsüljük ($0{,}079 \cdot 3140 = 7{,}9 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}14 \cdot 10^3 \approx 8 \cdot 3 \cdot 10^1 = 240$); az A skála bal oldali részén a futó indexe segítségé-

vel beállítjuk 7,9-et; a B skála 1-es osztását fedésbe hozzuk az indexszel; a B skálán az indexszel felkeressük 3,1,4-et; az A skálán leolvassuk az index állását, 2,4,8-at. A szorzat értéke az előbbi becslés figyelembevételével: 248.

2. Mekkora munkát végez az az egyszerű emelőgép, amely $Q = 565$ kg terhet $h = 4{,}56$ m magasra emel?

$$L = QH = 565 \cdot 4{,}56 = 2570 \text{ mkg.}$$

3. Egy műtárgy építésénél 386,5 m³ földet kell megmozgatni. A föld lazulása 25%-os. Hány m³ földet kell elszállítani?

$$V = 386{,}5 \cdot 1{,}25 = 483 \text{ m}^3.$$

Feladatok

Végezzük el az alábbi szorzásokat a felső skálákon:

1. $357 \cdot 0{,}3042$.
2. $221 \cdot 19\,630$.
3. $0{,}051 \cdot 0{,}000\,12$.
4. $64\,500 \cdot 743$.

c) Osztás

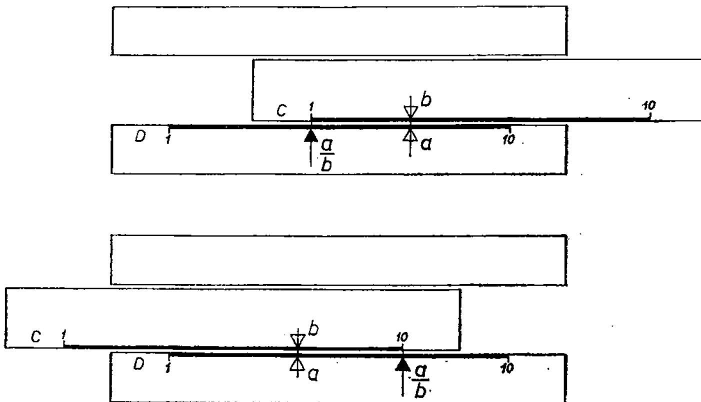
Az osztás műveletének elvégzése a hányados logaritmusára vonatkozó

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

azonosságon alapul. Ennek segítségével osztás helyett a számláló és nevező logaritmusának grafikus kivonását végezzük el. Az osztás művelete is elvégezhető mind az alsó, mind a felső beosztások segítségével.

α) **A C és D skálával** | Osztás elvégzése az alsó beosztások útján a C és D skálák felhasználásával a következő *lépések*ben történik (13. ábra):

Megbecsüljük a hányados nagyságrendjét.



13. ábra

A D skálán a futó segítségével beállítjuk a számlálót (a-t).

A tolókát úgy mozdítjuk el, hogy a C skálán levő nevező az indexszel fedésbe kerüljön. (Vigyázzunk, hogy e művelet közben az index ne mozduljon el!)

Az indexet elmozdítva a tolóka jobb oldali állása esetén a C skála 1-esét, bal oldali állása esetén pedig a C skála 10-esét vele beállítjuk.

Ezen beállítás mellett a D skálán leolvassuk az index állását.

Példák

1. Mivel egyenlő $\frac{3140}{22,8}$?

A számítást az alsó skálákon végezzük el. A D skálán a futó indexe segítségével beállítjuk 3,1,4-et; a C skála 2,2,8 osztását az indexszel fedésbe hozzuk; az indexet a C skála 1-esére állítjuk; a D skálán leolvassuk az index állását, 1,3,7,7-et. A hányados értéke a nagyságrendi becslés figyelembevételével: 137,7.

2. Mivel egyenlő $\frac{0,157}{4,56}$?

A számítást az alsó skálákon végezzük el. A feladat megoldása az előbbi példához hasonló módon történik. A hányados nagyságrendjét kerekítéssel és 10 egészkitevőjű hatványai segítségével megbecsüljük ($0,157 : 4,56 = 15,7 \cdot 10^{-2} : 4,56 \approx 15 \cdot 10^{-2} : 5 = 3 \cdot 10^{-2} = 0,03$), a D skálán a futó indexe segítségével beállítjuk 1,5,7-et; a C skála 4,5,6 osztását az indexszel fedésbe hozzuk; az indexet a C skála 10-esére állítjuk; a D skálán leolvassuk az index állását, 3,4,4-et. A hányados értéke az előbbi becslés figyelembevételével: 0,0344.

3. 483 m^3 földmennyiséget 0,75 m^3-es csillékkel szállítunk el. Hány csillét tölt meg a fenti földmennyiség?

$$n = \frac{483}{0,75} = 644 \text{ darab.}$$

Feladatok

Végezzük el az alábbi osztásokat az alsó skálákon!

1. $\frac{72,4}{83,5}$.

2. $\frac{584}{0,0312}$.

3. $\frac{0,000\,409}{0,006\,95}$.

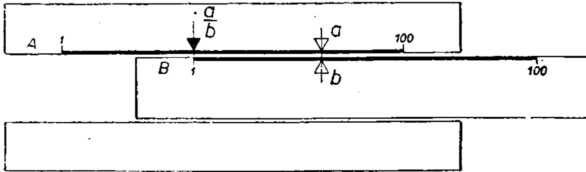
4. $\frac{0,000\,622}{1740}$.

β) Az A és B skálával | Osztás elvégzése a felső beosztásokon az A és B skálák felhasználásával a következő *lépésekben* történik (14. ábra):

Megbecsüljük a hányados nagyságrendjét.

Az A skálán a futó indexe segítségével beállítjuk a számlálót (a-t).

A tolókát úgy mozdítjuk el, hogy a B skálán fekvő nevező az indexszel fedésbe kerüljön.



14. ábra

Az indexet elmozdítva a tolóka jobb oldali állása esetén a B skála 1-esét, bal oldali állása esetén pedig a B skála 100-asát vele beállítjuk.

Ezen beállítás mellett az A skálán leolvassuk az index állását.

Példák

1. Mivel egyenlő $\frac{62{,}8}{0{,}000\,512}$?

A számítást a felső skálákon végezzük el. A hányados nagyságrendjét kerekítéssel és 10 egészkitevőjű hatványai segítségével megbecsüljük ($62{,}8 : 0{,}000\,512 = 6{,}28 \cdot 10^1 : 5{,}12 \cdot 10^{-4} \approx 1 \cdot 10^5 = 100\,000$); az A skálán a futó indexe segítségével beállítjuk 6,2,8-at; a B skála 5,1,2 osztását az indexszel fedésbe hozzuk; az indexet a B skála 1-esére állítjuk; az A skálán leolvassuk az index állását, 1,2,2,6-ot. A hányados értéke az előbbi becslés figyelembevételével: 122 600.

2. Egy 44 mm² keresztmetszetű drót 14 000 kp súllyal van megterhelve. Mekkora feszültség ébred a drótban?

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{14\,000}{44} = 318 \text{ kp/mm}^2.$$

Feladatok

Végezzük el az alábbi osztásokat a felső skálákon!

1. $\frac{6{,}73}{8{,}14}$.

2. $\frac{5240}{0{,}341}$.

3. $\frac{0{,}076}{935}$.

4. $\frac{1\,760\,000}{14\,800}$.

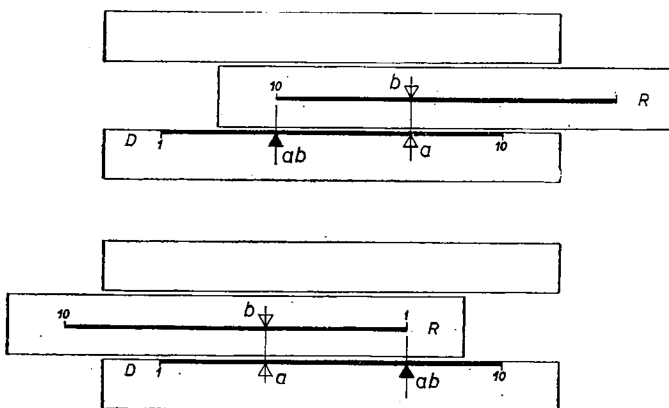
d) Szorzás és osztás elvégzése a reciprok skála felhasználásával

α) Szorzás | A szorzás műveletének reciprok skálán való elvégzése az $ab = a : \frac{1}{b}$ azonosság logaritmizálásából származó

$$\log ab = \log a + \left(-\log \frac{1}{b}\right)$$

azonosságon alapul.

A szorzás elvégzése ez esetben a következő *lépések*ben történik (15. ábra):



15. ábra

Megbecsüljük a szorzat nagyságrendjét.

A *D* skálán a futó indexe segítségével beállítjuk az egyik tényezőt (*a*-t).

A tolókát úgy mozdítjuk el, hogy az *R* skálán fekvő másik tényező az indexszel fedésbe kerüljön;

Az indexet elmozdítva a tolóka jobb oldali állása esetén az *R* skála 10-esét, bal oldali állása esetén az *R* skála 1-esét vele beállítjuk.

Ezen beállítás mellett a *D* skálán leolvassuk az index állását.

Kérdés, *mikor használjuk* a reciprok skálával való szorzás esetén *az R skála kezdő vonalát és mikor a végső vonalát.* Az *R* skálának mindig azon végső vonalát vesszük figyelembe, amelyik a lécen belül marad. (El sem véthetjük a dolgot, mert a másik végső vonal a lécen kívül esik.) Tehát míg az alsó skálák segítségével elvégzett szorzásoknál nekünk kell külön minden esetben eldöntenünk, hogy a tolókát jobbra kell kitolnunk vagy balra, addig a reciprok skála segítségével történő szorzásoknál ez magától adódik. Ily módon időmegtakarítást és kényelmet eredményez a reciprok skála használata.

Ha a tolókán *nincs reciprok skála,* akkor a fenti előnyt úgy biztosíthatjuk magunknak, hogy a tolókát a lécből kihúzzuk, és fordítva helyezzük a lécbe vissza, úgyhogy a beosztást jelző számok fejjel lefelé kerülnek. A megfordítás folytán a *C* skála kerül felülre, és a *B* skála kerül alulra.

A szorzás végrehajtása az előbbiekhez teljesen hasonló módon történik, csak az *R* skála szerepét most a felül elhelyezkedő *C* skála veszi át. A fordított számok beállítása, illetve leolvasása kezdetben némi nehézséget jelent. Kis gyakorlattal ez könnyen kiküszöbölhető.

Példák

1. Mivel egyenlő $432 \cdot 5{,}28$?

A szorzást a reciprok skála felhasználásával végezzük el. A tényezőket kikerekítve a szorzat nagyságrendjét megbecsüljük ($400 \cdot 5 = 2000$); a *D* skálán a futó indexe segítségével beállítjuk 4,3,2-t; az *R* skála 5,2,8 osztását az indexszel fedésbe hozzuk; az indexet az *R* skála 10-esére állítjuk; a *D* skálán leolvassuk az index állását, 2,2,8-at. A szorzat értéke az előbbi becslés figyelembevételével: 2280.

2. Egy egyenáramú motor, amelynek kapcsai között $U = 220$ V feszültség uralkodik, $I = 28$ A erősségű áramot vesz fel. Számítsuk ki a motor teljesítményét!

$$N = UI = 220 \cdot 28 = 6160 \text{ W}.$$

3. $Q = 1{,}7$ Mp súlyú testet $\mu = 0{,}35$ súrlódási tényezővel jellemzett vízszintes pályán vontatunk. Mekkora a vontatóerőnek ellenszegülő súrlódóerő?

$$S = \mu Q = 0{,}35 \cdot 1700 = 595 \text{ kp}.$$

Feladatok

Végezzük el az alábbi szorzásokat a reciprok skála felhasználásával!

1. $64{,}1 \cdot 5670$.
2. $78{,}5 \cdot 0{,}000\,12$.
3. $4320 \cdot 2140$.
4. $0{,}0021 \cdot 0{,}000\,89$.

β) **Osztás** | Az osztás műveletének reciprok skálán való elvégzése az $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ azonosság logaritmizálásából származó

$$\log \frac{a}{b} = \log a + \log \frac{1}{b}$$

azonosságon alapul. Az osztás elvégzése ez esetben a következő *lépések*ben történik (16. ábra):

Megbecsüljük a hányados nagyságrendjét.

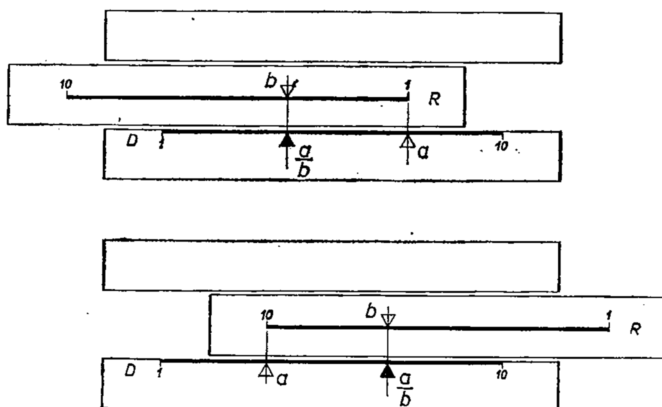
A *D* skálán a futó indexe segítségével beállítjuk a számlálót (*a*-t).

A tolókát jobb felől addig húzzuk kifelé, míg az *R* skála 10-ese fedésbe kerül az indexszel.

Az indexet helyzetéből elmozdítva az *R* skálán felkeressük vele a nevezőt (*b*-t).

A *D* skálán leolvassuk az index állását.

Az esetben, ha a tolókán az R skálán *a nevező a lécen kívülre kerül,* a tolókát nem jobb felé, hanem bal felé toljuk ki a lécből, és nem az R skála 10-esét, hanem 1-esét hozzuk fedésbe az indexszel.



16. ábra

Példák

1. Mivel egyenlő $\frac{28,5}{4,1}$?

Az osztást reciprok skála felhasználásával végezzük el. A tényezőket kikerekítve a hányados nagyságrendjét megbecsüljük (28 : 4 = 7); a D skálán a futó indexe segítségével beállítjuk 2,8,5-öt; az R skála 10-es osztását fedésbe hozzuk az indexszel; az R skálán az indexszel felkeressük 4,1-et; a D skálán leolvassuk az index állását, 6,9,5-öt. A hányados értéke az előbbi becslés figyelembevételével: 6,95.

2. Milyen erős áram halad át azon a főzőkészüléken, amelynek kapcsai között a feszültség $U = 110$ V és az ellenállás $R = 25\ \Omega$?

$$I = \frac{U}{R} = \frac{110}{25} = 4,4 \text{ A}.$$

Feladatok

Végezzük el az alábbi osztásokat a reciprok skála segítségével!

1. $\frac{5630}{7850}$.

2. $\frac{0,0041}{0,000\,0205}$.

3. $\frac{6250}{0,0074}$.

4. $\frac{0,000\,11}{0,0101}$.

3. §. NÉGYZETRE ÉS KÖBRE EMELÉS, NÉGYZET- ÉS KÖBGYÖKVONÁS LOGARLÉCCEL

a) Négyzetre emelés

A négyzetre emelés művelete a

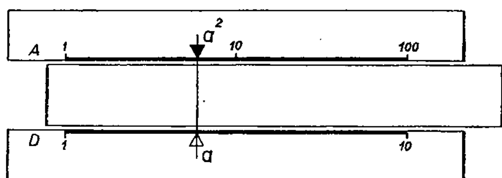
$$\log a^2 = 2 \cdot \log a$$

azonosságon alapul.

A művelet elvégzése az *A* és *D* skálák felhasználásával a következő *lépések*ben történik (17. ábra):

A *D* skálán a futó indexe segítségével beállítjuk a hatványalapot.

Az *A* skálán leolvassuk az index állását.



17. ábra

Hasonló módon végezhető el a négyzetre emelés a *B* és *C* skálák segítségével is. Amennyiben nagyobb pontosságra törekszünk, úgy a négyzetre emelés helyett a *C* és *D* skálákon szorzást végzünk ($a^2 = a \cdot a$).

A négyzetre emelés elvégzésénél *a helyérték* megállapítása a következő módon történik:

ha valamely szám négyzetét az *A* skála első felében olvassuk le, úgy az eredmény $2n - 1$ egész jegyet,

ha valamely szám négyzetét az *A* skála második felében olvassuk le, úgy az eredmény $2n$ egész jegyet tartalmaz.

Példák

1. Mivel egyenlő $41{,}6^2$?

A *D* skálán beállítjuk 4,1,6-ot; az index állását most az *A* skála jobb oldali felén olvassuk le (1,7,3); az eredmény egész jegyeinek száma $2n = 4$. A négyzetre emelés eredménye: 1730.

2. Mivel egyenlő 305^2?

A *D* skálán beállítjuk 3,0,5-öt; az index állását most az *A* skála bal oldali felén olvassuk le (9,3); az eredmény egész jegyeinek száma $2n - 1 = 5$. A négyzetre emelés eredménye: 93 000.

3. Mivel egyenlő $0{,}054^2$?

A *D* skálán beállítjuk 5,4-et; az index állását most az *A* skála jobb oldali felén olvassuk le (2,9,2); az eredmény egész jegyeinek száma $2n = -2$. A négyzetre emelés eredménye: 0,002 92.

Feladatok

Végezzük el az alábbi négyzetre emeléseket!

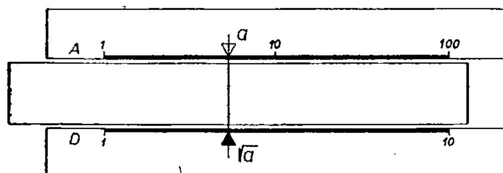
1. 411^2.
2. $8{,}51^2$.
3. $0{,}006\,21^2$.
4. $29{,}4^2$.
5. $1{,}08^2$.
6. $0{,}000\,246^2$.

b) Négyzetgyökvonás

A négyzetgyökvonás művelete a

$$\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$$

azonosságon alapul. Mint innen is látható, a négyzetgyökvonás a négyzetre emelés (egyik) fordított művelete.



18. ábra

A művelet elvégzése az *A* és *D* skálák felhasználásával a következő *lépésekben* történik (18. ábra):

Az *A* skálán a futó indexe segítségével beállítjuk azt a számot, amelyből négyzetgyököt akarunk vonni.

A *D* skálán leolvassuk az index állását.

Tudjuk, hogy az *A* skála bal és jobb oldali része azonos beosztású. Hogy *melyik részen állítjuk be* azt a számot, amelyből négyzetgyököt akarunk vonni, azt a következőképpen döntjük el:

A szóban forgó számot egész szám vagy vegyes tizedes tört esetében a tizedesjeltől balra, valódi tizedes tört esetében a tizedesjeltől jobbra felbontjuk kettős csoportokra (pl. 3 | 32, | 63, illetve 0, | 00 | 27 | 5.)

Ha az első kettes csoportbeli szám 10-nél kisebb (az első példában ez 3-mal egyenlő), akkor a számot a beosztás bal oldali részén kell beállítani.

Ha ugyanez 10-nél nagyobb (a második példában ez 27-tel egyenlő), akkor a számot a jobb oldali részen kell beállítani.

A helyérték megállapítása a következőképpen történik:

Vegyes tizedes tört vagy egész szám négyzetgyökvonásánál az egész számjegyek száma megegyezik a csoportok számával (a fenti első példa esetében tehát kettővel).

Valódi tizedes tört esetén az eredményben annyi zérót kell a tizedesvessző után írnunk, ahány kizárólag zérókból álló kettős csoportot találunk az adott számban.

Példák

1. Mivel egyenlő $\sqrt{3 \mid 12 \mid 00}$?

A kettes csoportba való beosztás után látható, hogy az első kettes csoportban levő szám 1 és 10 között van; az index beállítását tehát az *A* skála bal oldali részén végezzük el (3,1,2); a *D* skálán leolvassuk az index állását, 1,7,6,6-ot; a csoportok száma három. A négyzetgyökvonás eredménye: 176,6.

2. Mivel egyenlő $\sqrt{0, \mid 00 \mid 00 \mid 00 \mid 22 \mid 6}$?

A kettes csoportba való beosztás után látható, hogy az első kettes csoportban levő szám 10 és 100 között van. Az index beállítását tehát az *A* skála jobb oldali részén végezzük el (2,2,6); a *D* skálán leolvassuk az index állását, 4,7,5-öt; a kizárólag zérót tartalmazó kettős csoportok száma három. A négyzetgyökvonás eredménye: 0,000 475.

Feladatok

Végezzük el az alábbi négyzetgyökvonásokat!

1. $\sqrt{41}$.
2. $\sqrt{0,71}$.
3. $\sqrt{0,1}$.
4. $\sqrt{891\,400}$.
5. $\sqrt{0,000\,021}$.
6. $\sqrt{0,003\,513}$.

c) Köbre emelés

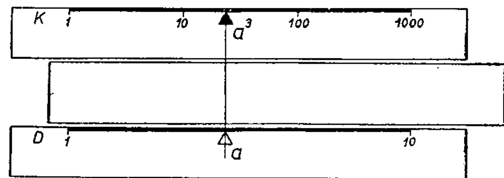
A köbre emelés és a köbgyökvonás művelete az úgynevezett *köbskála* (lásd a 19. ábrán *K*-val jelölt skálát) segítségével végezhető el. E beosztás hossza az alapskála hosszának egyharmada. A skála beosztása a következő: normállécen 1 és 2 között a tizedek öt részre vannak osztva, 2 és 5 között felezve vannak, 5 és 10 között csak a tizedek vannak megjelölve; zseblécen 1 és 2 között a tizedek felezve vannak, 2 és 5 között csak a tizedek vannak megjelölve, 5 és 10 között pedig csupán minden második tized kap külön jelölést.

A köbre emelés műveletének elvégzése a

$$\log a^3 = 3 \log a$$

azonosságon alapul.

A művelet elvégzése a *D* és *K* skálák felhasználásával a következő *lépések*ben történik (19. ábra):



19. ábra

A *D* skálán a futó indexe segítségével beállítjuk a hatványalapot.

A *K* skálán leolvassuk az index állását.

A helyérték meghatározására vonatkozó szabály a következő: Legyen az adott szám egész jegyeinek száma *n*.

Ha valamely szám köbét a *K* skála első harmadában olvassuk le, úgy az eredmény $3n - 2$ egész jegyet tartalmaz.

Ha valamely szám köbét a K skála középső harmadában olvassuk le, úgy az eredmény $3n - 1$ egész jegyet tartalmaz.

Ha valamely szám köbét a K skála utolsó harmadában olvassuk le, úgy az eredmény $3n$ egész jegyet tartalmaz.

Amennyiben nagyobb pontosságra törekszünk, vagy lécünkön *nincs köbskála*, úgy a köbreemelés művelete helyett négyzetre emelést és szorzást ($a^3 = a^2 \cdot a$) vagy háromtényezős szorzást ($a^3 = a \cdot a \cdot a$) is végezhetünk.

Példák

1. Mivel egyenlő 124^3?

A D skálán beállítjuk 1,2,4-et; az index állását most a K skála bal oldali harmadában olvassuk le (1,9,1); az eredmény egész jegyeinek száma $3n - 2 = 7$. A köbre emelés eredménye: 1 910 000.

2. Mivel egyenlő $4{,}15^3$?

A D skálán beállítjuk 4,1,5-öt; az index állását most a K skála középső harmadában olvassuk le (7,1,5); az eredmény egész jegyeinek száma: $3n - 1 = 2$. A köbre emelés eredménye: 71,5.

3. Mivel egyenlő $0{,}000\,0823^3$?

A D skálán beállítjuk 8,2,3-at; az index állását most a K skála jobb oldali harmadában olvassuk le (5,5,7) az eredmény egész jegyeinek száma $3n = -12$. A köbre emelés eredménye: 0,000 000 000 000 557.

Feladatok

Végezzük el az alábbi köbre emeléseket!

1. $7{,}76^3$.
2. $54{,}3^3$.
3. $0{,}45^3$.
4. 113^3.
5. $0{,}0198^3$.
6. $0{,}000\,0089^3$.

d) Köbgyökvonás

A köbgyökvonás művelete a

$$\log \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3} \log a$$

azonosságon alapul.

Mint innen is látható, a köbgyökvonás a köbre emelés (egyik) fordított művelete. A művelet elvégzése a K és D skálák felhasználásával a következő *lépések*ben történik (20. ábra):

A K skálán a futó indexe segítségével beállítjuk azt a számot, amelyből köbgyököt akarunk vonni.

A D skálán leolvassuk az index állását.

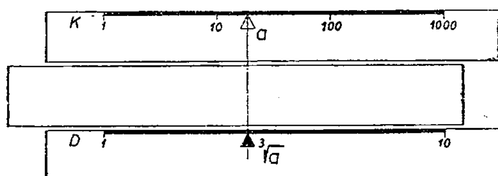
Tudjuk, hogy a K skála három azonos beosztású részből áll. Hogy *melyik részen állítjuk be* azt a számot, amelyikből köbgyököt akarunk vonni, azt a következőképpen döntjük el:

A szóban forgó számot egész szám vagy vegyes tizedes tört esetében a tizedesjeltől balra, valódi tizedes tört esetében a tizedesjeltől jobbra felbontjuk hármas csoportokra (pl. 4 | 564, | 81; 0, | 028 | 5; illetve 0, | 864 | 2).

Ha az első hármas csoportban levő szám 10-nél kisebb (az első példában ez 4-gyel egyenlő), akkor a számot a *K* skála bal oldali részén kell beállítani.

Ha ugyanez 10-nél nagyobb, de 100-nál kisebb, akkor a számot a *K* skála középső részén kell beállítani.

Ha ugyanez 100-nál nagyobb, de 1000-nél kisebb, akkor a számot a *K* skála jobb oldali részén kell beállítani.



20. ábra

A helyérték megállapítása a négyzetgyökvonáshoz hasonlóan igen egyszerűen történik. Vegyes tizedes törteknél, illetőleg egész számoknál az egész számjegyek száma megegyezik a csoportok számával. Valódi tizedes tört esetén az eredményben annyi zérót kell írnunk, ahány kizárólag zérókból álló hármas csoportot találunk az adott számban.

Példák

1. Mivel egyenlő $\sqrt[3]{875{,}6}$?

A hármas csoportba való beosztás után látható, hogy az első csoportban levő szám 100 és 1000 között van; a beállítást tehát a *K* skála jobb oldali részén végezzük el (8,7,5,6); a *D* skálán leolvassuk az index állását, 9,5,6-ot; a csooportok száma egy. A köbgyökvonás eredménye: 9,56.

2. Mivel egyenlő $\sqrt[3]{0{,}075}$?

A hármas csoportba való beosztás után látható, hogy az első csoportban levő szám 10 és 100 között van; a beállítást tehát a *K* skála középső részén végezzük el (7,5); a *D* skálán leolvassuk az index állását 4,2,2-t; kizárólag zérót tartalmazó csoport nincs. A köbgyökvonás eredménye: 0,422.

3. Mivel egyenlő $\sqrt[3]{0, | 000 | 007}$?

A hármas csoportba való beosztás után látható, hogy az első csoportban levő szám 1 és 10 között van; a beállítást a *K* skála bal oldali részén végezzük el (7); a *D* skálán leolvassuk az index állását 1,9,1-et; kizárólag zérót tartalmazó csoportok száma egy. A köbgyökvonás eredménye: 0,0191.

*

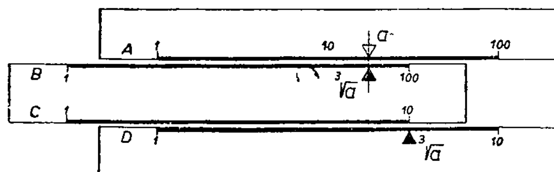
A köbgyökvonás művelete akkor is elvégezhető, ha logarlécünkön *nincs köbskála*. Ez esetben két módszert is követhetünk.

*Az első módszer*rel a köbgyökvonás műveletét a következő lépésekben végezzük el (21. ábra):

Az adott számot egész szám vagy vegyes tizedes tört esetében a tizedesvesszőtől balra, valódi tizedes tört esetében a tizedesvesszőtől jobbra felbontjuk hármas csoportokra.

Ha az első csoportban levő szám 1 és 10 között van, akkor azt a számot, amelyből köbgyököt akarunk vonni, az *A* skála bal oldali részén,

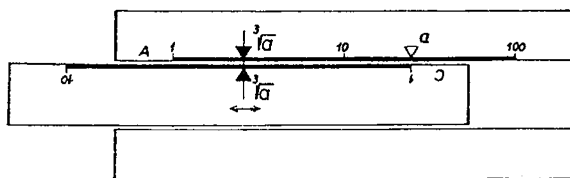
ha az első csoportban levő szám 10 és 1000 között van, akkor azt a számot, amelyből köbgyököt akarunk vonni, az *A* skála jobb oldali részén a futó indexe segítségével beállítjuk.



21. ábra

A tolókát addig mozgatjuk jobbra vagy balra, amíg a *C* skálán az index alatt és az *A* skálán a *B* skála 1-ese vagy 100-asa fölött ugyanaz a szám mutatkozik. Ez lesz az adott szám köbgyöke.

*A második módszer*rel a műveletet a következő lépésekben végezzük el (22. ábra):



22. ábra

Megfordítjuk a tolókát úgy, hogy számai fejjel lefelé álljanak. Az *A* skálán a futó indexe segítségével — az első módszernél megismert szabály figyelembevételével — beállítjuk azt a számot, melyből köbgyököt akarunk vonni. A megfordított tolóka *C* skálájának 1-es vagy 10-es osztását az indexre állítjuk; az indexet elmozdítva az *A* és *C* skálán egymással szemben két azonos számot keresünk. Ez lesz az adott szám köbgyöke.

Példák

1. Mivel egyenlő $\sqrt[3]{280\,000}$?

Az első módszert alkalmazzuk. A hármas csoportba való beosztás után látható, hogy az első csoportban levő szám 100 és 1000 között van; a beállítást az *A* skála jobb oldali részén végezzük el; a tolókát alapállásából balra elmozgatva 6,5,4 lesz az a szám, amely a *C* skálán az index alatt és az *A* skálán a *B* skála 100-asa fölött egy időben megtalálható; a csoportok száma kettő. A köbgyökvonás eredménye: 65,4.

2. Mivel egyenlő $\sqrt[3]{0{,}000\,002}$?

A második módszert alkalmazzuk. A hármas csoportba való beosztás elvégzése után látható, hogy az első csoportban levő szám 1 és 10 között van; a beállítást tehát az *A* skála bal oldali részén végezzük el; a megfordított tolóka *C* skálájának 1-es osztását az indexre állítjuk; az indexet elmozdítva 1,2,6 lesz az a szám, amely az *A* és *C* skálán egymással szemben található; a kizárólag zérót tartalmazó csoportok száma egy. A köbgyökvonás eredménye: 0,0126.

Feladatok

Végezzük el az alábbi köbgyökvonásokat köbskála felhasználásával és anélkül!

1. $\sqrt[3]{84\,000}$.
2. $\sqrt[3]{8400}$.
3. $\sqrt[3]{840}$.
4. $\sqrt[3]{0{,}000\,000\,136}$.
5. $\sqrt[3]{0{,}001\,62}$.
6. $\sqrt[3]{6\,720\,000}$.

4. §. TRIGONOMETRIKUS MŰVELETEK LOGARLÉCCEL

a) Trigonometrikus skálák

A normálléc homloklapjának alsó felén két fokbeosztással ellátott skálát láthatunk.

Ezek közül *a felső 5° és 90° között számozott skála* a sinus- és cosinusértékek kiszámítására szolgál. A balról jobbra haladó (fekete) számozás a sinus-, a jobbról balra haladó (rendszerint piros) számozás a cosinusértékekre vonatkozik.

Az alosztások nem perc, hanem tizedfok jellegűek. A fekete számozást tekintve az alosztásközök 7°-ig 0,05°-osak, 7°-tól 20°-ig 0,1°-osak, 20°-tól 40°-ig 0,2°-osak, 40°-tól 60°-ig 0,5°-osak, 60° és 80° között a fokoknak nincs alosztása. Ezután 85°, majd 90° mint végbeosztás van megjelölve.

Az alsó 5° és 45° között számozott skála a tangens- és cotangensértékek kiszámítására szolgál. A balról jobbra haladó (fekete) számozás a tangens-, a jobbról balra haladó (rendszerint piros) számozás pedig a cotangensértékekre vonatkozik.

Az alosztások itt is tizedfok jellegűek. A fekete számozást tekintve az alosztásközök 7°-ig 0,05°-osak, 7°-tól 30°-ig 0,1°-osak, 30°-tól 45°-ig 0,2°-osak.

A most leírt skálákon a beállítás, illetve leolvasás elvégzésénél az ablak középső hajszálvonalának meghosszabbítását képező indexet használjuk.

A következőkben szükségünk lesz a 25. ábrán *P betűvel jelölt (általában piros színű) skálára*. Ez a beosztás a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumba eső számokra adja meg $\sqrt{1 - x^2}$ értékét. A skála alosztásainak figyelmes áttanulmányozását az olvasóra bízzuk.

A zseblécen a szögfüggvények skálái a tolóka hátlapján találhatók.*

A tolókát kihúzva és megfordítva a hátlapon három beosztást láthatunk. *A legfelső S*-sel jelölt 5°44′ és 90° között számozott skála a sinus- és cosinusértékek kiszámítására szolgál. Az alosztások nem tizedfok, hanem perc jellegűek: 10°-ig 5′-esek, 10° és 20° között 10′-esek, 20° és 30° között 20′-esek, 30° és 40° között 30′-esek, 40° és 70° között csak a fokbeosztások vannak megjelölve, míg 70° és 80° között csak minden második fok kap külön jelölést; ezután 85°, majd 90° mint végosztás van megjelölve.

A *legalsó, T*-vel jelölt 5°43′ és 45° között számozott skála a tangens- és cotangensértékek kiszámítására szolgál. Az alosztások 30°-ig megegyeznek az *S* skála alosztásaival; innen kezdve minden alosztás 20′-es.

A középső, S & T-vel jelölt 34′ és 5° 44′ között számozott skála kis szögek sinus- és tangensértékeinek kiszámítására szolgál. Az alosztások 1°-ig 1′-esek, 1° és 2° között 2′-esek, 2°-tól a skála végéig 5′-esek.

A tolóka *hátlapján* levő skálák leolvasását a logarléc testébe két végén bevájt és marással ellátott U alakú bevágások teszik lehetővé.

* Megemlítjük, hogy egyes külföldi normálléceknél is hasonló módon nyertek elhelyezést a trigonometrikus skálák.

Önként adódik a kérdés, hogy *miért kezdődnek és részben miért végződnek a skálák beosztásai speciális számértékekkel.* Gondoljuk meg, hogy a trigonometrikus skálák a szögfüggvények logaritmusát ábrázolják. Ebből következik, hogy az S beosztást nem kezdhetjük 0-sal, mert $\lg \sin 0° = -\infty$, amit természetesen ábrázolni nem lehet. A kezdőbeosztás 5°44′, mert $\sin 5°44' = 0{,}1$, vagyis $\lg \sin 5°44' = -1$. A normállécen a kezdőosztás 5°; az 5° és 5°44′ közötti skálarész használatát a D skála bal oldali csonka beosztása teszi lehetővé. Az S skála utolsó beosztása 90°, mert $\sin 90° = 1$, vagyis $\lg \sin 90° = 0$. Hasonlóképpen a T skála utolsó beosztása 45°, mert $\operatorname{tg} 45° = 1$, vagyis $\lg \operatorname{tg} 45° = 0$. Az S & T skálán levő értékek logaritmusa hasonló meggondolások alapján -2 és -1 között változik. Ilyen módon az egész skála hossza egységnyinek van felvéve.

b) Sinuskeresés

α) $0 \leqq \alpha \leqq 34'$ | A logarléccel egyáltalán elérhető pontosság határán belül megengedhető, hogy *a 34′-nél kisebb szögek sinusát és tangensét a szög radiánban kifejezett mértékszámával vegyük egyenlőnek.* Ismert képlet szerint az α szög radiánban kifejezve:

$$\alpha = \frac{\pi}{180°}\alpha° = \frac{\pi}{180\cdot 60'}\alpha' = \frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60''}\alpha''.$$

Bevezetve a következő jelöléseket:

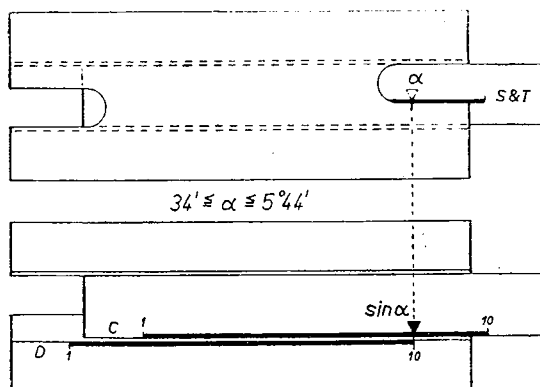
$$\varrho = \frac{180°}{\pi} = 57{,}3°,\quad \varrho' = \frac{180\cdot 60'}{\pi} = 3438',\quad \varrho'' = \frac{180\cdot 60\cdot 60}{\pi} = 206\,265'',$$

akkor a 34′-nél kisebb szögekre:

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}.$$

Egyes külföldi normálléceken a C és R skálákon ϱ, ϱ' és ϱ'' értékeit külön megjelölik, tehát a számolás könnyen, egyszerű osztással elvégezhető. Más lécekkel való számolásnál ϱ, ϱ' és ϱ'' értékeit külön meg kell jegyeznünk.

β) $34' \geqq \alpha \geqq 5°44'$ | *Normállécen* ez esetben is a fenti módszert követjük a



23. ábra

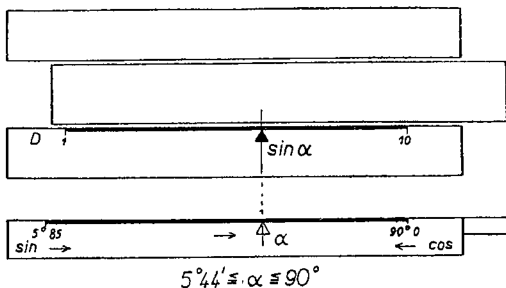
$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = \frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}$$

összefüggések alapján. Az 5° és 5°44′ közé eső szögeknél a D skála 1-esétől balra fekvő csonka beosztáson olvasható le az eredmény.

Zseblécen a tolóka hátlapjának középső skáláján, az U alakú vájat alsó részébe vésett index segítségével állítjuk be a szöget (23. ábra), majd a lécet visszafordítva a D skála jobb oldali 1-ese fölött a C skálán leolvassuk az eredményt. Az így leolvasott értékek 0,01 és 0,1 közé esnek.

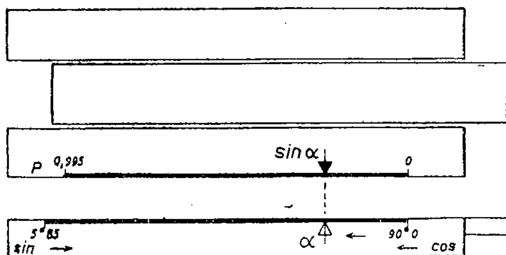
γ) $5° 44' \leqq \alpha \leqq 90°$ | *Normállécen* a futó indexét *a sinus-cosinus skála* fekete számozása alapján beállítjuk, és leolvassuk az index állását a *D* skálán (24. ábra).

Ezen intervallumba eső sinusértékek meghatározása *a P skála* segítségével a $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ azonosság alapján a következő módon történhet: Az indexet a sinus-cosinus skála jobbról balra menő (piros) számozása alapján állítjuk be, és az index állását a *P* skálán olvassuk le (25. ábra). Nagyobb szögeknél ez a módszer ad pontosabb értéket. Pl. sin 76° értéke az előbbi módszerrel 0,97-ra adódik, míg a *P* skála segítségével 0,9703-at kapunk.



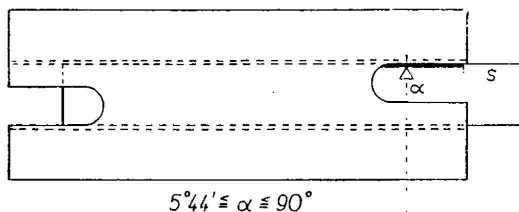
24. ábra

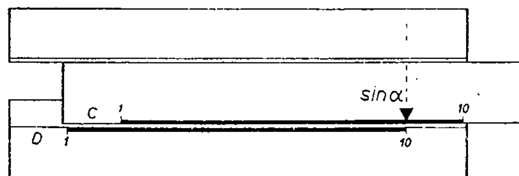
Zseblécen az S skálán végezzük a beállítást a jobb oldali U alakú vájat felső részébe vésett index segítségével, majd a lécet megfordítva, a *D* skála jobb oldali 1-ese felett a *C* skálán leolvassuk az eredményt (26. ábra).



25. ábra

Megemlítjük, hogy *a tolóka hátlapján* levő skálák akkor is használhatók, ha kihúzzuk, megfordítjuk, majd alapállásba hozzuk a tolókát. Ilyenkor az adott szöget a futó indexével állítjuk be, és a leolvasást a *D* skálán végezzük el (27. ábra). Az így leolvasott értékek 0,1 és 1 közé esnek. Ez a módszer különösen akkor alkalmazható célszerűen, ha szögfüggvényértékek meghatározását sorozatosan kell elvégezni. Így ugyanis elkerülhető a léc ide-oda való forgatása.





26. ábra

Példák

1. $\sin 1°30' = \sin 1{,}5° = 0{,}0262.$
2. $\sin 42°15' = 0{,}672.$
3. $\sin 5' = \dfrac{5}{3438} = 0{,}00146.$

27. ábra

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi sinuskereséseket!

1. sin 7° 45′.
2. sin 73°.
3. sin 48° 30′.
4. sin 6,5°.
5. sin 3,3°.
6. sin 15′.

c) Arcussinus-keresés

Az előbbi művelet megfordítottja: egy adott sinusértékhez tartozó szöget keresünk meg. Ennek a műveletnek a végrehajtásánál *különös gonddal* vigyázzunk arra, hogy a beállítást a tizedesvessző helyétől függően más és más skálán kell elvégeznünk.

α) $0 \leqq \sin\alpha \leqq 0{,}01$ | A visszakeresés művelete — a sinuskeresés α esetének megfordítottjaképpen — ϱ'-vel, illetve ϱ''-vel történő *szorzásból* áll.

β) $0{,}01 \leqq \sin\alpha \leqq 0{,}1$ | *Normállécen* a visszakeresés — az odakeresés megfelelő esetének fordítottjaképpen — ϱ-val, ϱ'-vel, illetve ϱ''-vel történő szorzásból áll.

Zseblécen ez esetben a visszakeresés úgy történik, hogy a *D* skála 10-ese fölé állítjuk a *C* skála megfelelő sinusértékét, majd a lécet megfordítva az *S* & *T* skálán a vájat indexe alatt leolvassuk az eredményt (23. ábra).

γ) $0{,}1 \leqq \sin\alpha \leqq 1$ | *Normállécen* a futó indexét ráállítjuk a *D* skála megfelelő osztására (azaz az adott sinusértékre) és az eredményt (azaz a szöget) a sinusskálán olvassuk le (24. ábra).

Zseblécen a *D* skála jobb oldali 1-ese fölé állítjuk a *C* skála megfelelő osztását, majd a lécet megfordítva a leolvasást az *S* skálán végezzük el (26. ábra).

Példák

1. arc sin 0,00290 = 0,00290 · 3438 = 10′.
2. arc sin 0,45 = 26° 45′.
3. arc sin 0,856 = 58° 50′.
4. arc sin 0,047 = 2° 45′

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi arcussinus-kereséseket!

1. arc sin 0,0058.
2. arc sin 0,430.
3. arc sin 0,02.
4. arc sin 0,83.
5. arc sin 0,071.
6. arc sin 0,0018.

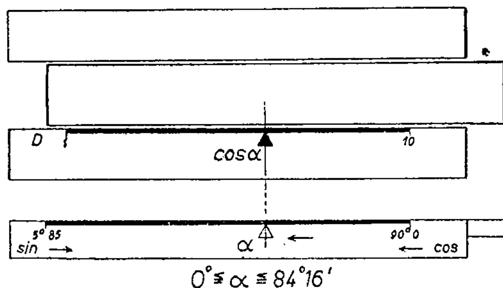
d) Cosinuskeresés

α) $0 \leqq \alpha \leqq 5° \, 44'$ | Ez esetben $\cos\alpha$ értékét a következő *közelítő összefüggés* alapján határozhatjuk meg:

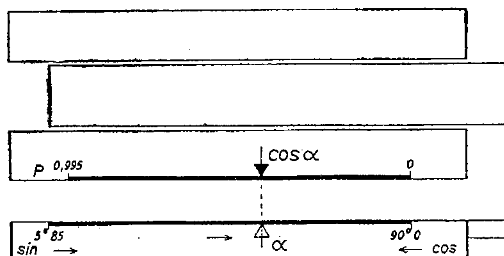
$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx 1 - 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{2} = 1 - \frac{(0{,}0175)^2}{2}(\alpha°)^2 =$$

$$= 1 - 1{,}52 \cdot 10^{-4}(\alpha°)^2.$$

β) $5° \, 44' \leqq \alpha \leqq 85° \, (84° \, 16')$* | *Normállécen* a futó indexét a sinus-cosinus skála jobbról balra menő (piros) számozása alapján állítjuk be, és leolvassuk az index állását a *D* skálán (28. ábra). Amennyiben a beállítást a balról jobbra menő (fekete) számozás alapján végezzük, úgy a leolvasást a *P* skálán eszközöljük (29. ábra).



28. ábra



29. ábra

Zseblécen a cosinuskeresést a sinuskeresésre vezetjük vissza, a $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ azonosság alapján. Ezen átalakítás után a beállítás és leolvasás a sinuskeresésnél leírtakkal azonos módon történik.

γ) $85° \, (84° \, 16') \leqq \alpha \leqq 90°$ | Mind a normál, mind a zseblécen — a $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ azonosság alapján — *a sinuskeresésnél leírtak* figyelembevételével számolunk.

Példák

1. $\cos 5° = 1 - 1{,}52 \cdot 10^{-4} \cdot 5^2 = 0{,}9962.$
2. $\cos 44° = \sin(90° - 44°) = \sin 46° = 0{,}719.$
3. $\cos 88° \, 15' = \sin(90° - 88° \, 15') = \sin 1° \, 45' = 0{,}0306.$

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi cosinuskereséseket!

1. $\cos 3° \, 30'$.
2. $\cos 52° \, 10'$.
3. $\cos 89° \, 50'$.
4. $\cos 71{,}6°$.
5. $\cos 1{,}8°$.
6. $\cos 45{,}3°$.

* A zárójeles érték zseblécre vonatkozik.

e) Arcuscosinus-keresés

Az előbbi művelet megfordítottja. Az $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ azonosság felhasználásával *ugyanazon műveleteket* végezzük el, mint az arc sin x kiszámításánál, és az eredményül kapott szöget 90°-ból levonjuk.

Példa

$$\arccos 0{,}855 = 90° - 58°45' = 31°15'.$$

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi arcuscosinus-kereséseket!

1. arc cos 0,123.
2. arc cos 0,0942.
3. arc cos 0,00546.
4. arc cos 0,681.
5. arc cos 0,0163.
6. arc cos 0,00252.

f) Tangenskeresés

α) $0 \leqq \alpha \leqq 34'$

illetve

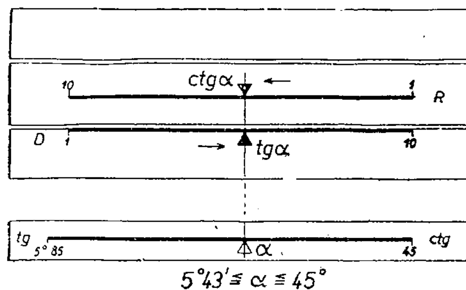
β) $34' \leqq \alpha \leqq 5°43'$

Kis szögről lévén szó, *a szög tangensét jó közelítéssel sinusával vehetjük egyenlőnek.* Így ezekben az esetekben a sinuskeresés című fejezetben leírt módszerek alkalmazandók. Az 5° és 5° 43′ közé eső szögek esetén a normálléc D skálájának csonka beosztását használjuk.

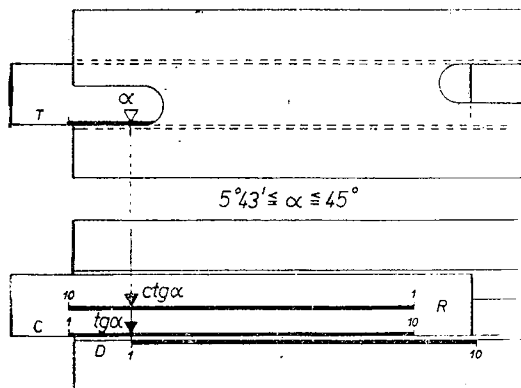
γ) $5°43' \leqq \alpha \leqq 45°$

Normálléczen a futó indexét a tangens-cotangens skála balról jobbra menő (fekete) számozása alapján beállítjuk, és leolvassuk az index állását a D skálán (30. ábra).

Zseblécen a T skálán végezzük el a beállítást (a bal oldali U alakú vájat alsó indexével), majd a lécet megfordítva a D skála bal oldali 1-ese felett a C skálán leolvassuk az eredményt (31. ábra). Az így kapott értékek 0,1 és 1 közé esnek.

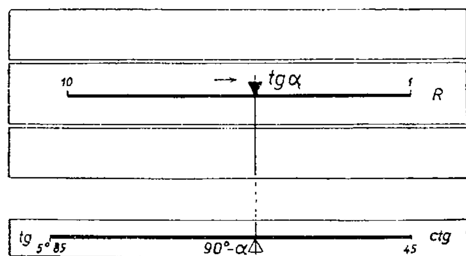


30. ábra

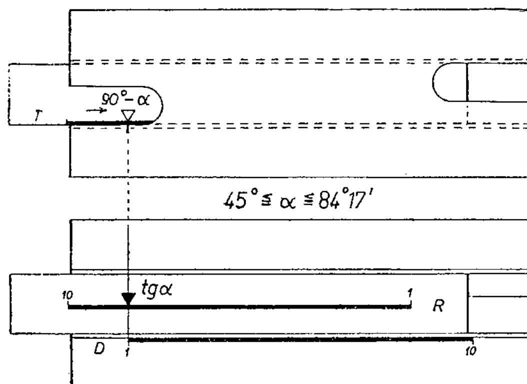


31. ábra

δ) $45° \leqq \alpha \leqq 84° 17'$ | Ilyenkor — mivel a tangensskála beosztása csak 45°-ig terjed — a $\text{tg}\,\alpha = \text{ctg}\,(90° - \alpha) = \frac{1}{\text{tg}\,(90° - \alpha)}$ azonosság alapján számolunk. Ez gyakorlatilag annyit jelent, hogy a 90°-ból levont szög tangensét *a reciprok skálán* olvassuk le (32—33. ábra). Az így kapott értékek mindig 1-nél nagyobbak.



32. ábra



33. ábra

ε) $84° 17' \leqq \alpha \leqq 89° 27'$* | Ez esetben is a $\text{tg}\,\alpha = \text{ctg}\,(90° - \alpha) = \frac{1}{\text{tg}\,(90° - \alpha)}$ azonosság alapján számolunk. Hasonlóképpen járunk el akkor is, ha

ζ) $89° 17' \leqq \alpha < 90°$ |

Példák

1. $\text{tg}\,8' = \frac{8}{3438} = 0{,}00232.$
2. $\text{tg}\,34° 30' = 0{,}687.$
3. $\text{tg}\,76° 20' = 4{,}113.$
4. $\text{tg}\,88° 10' = \text{ctg}\,1° 50' = \frac{1}{\text{tg}\,1° 50'} = 31{,}2.$
5. $\text{tg}\,89° 40' = \text{ctg}\,20' = \frac{1}{\text{tg}\,20'} = 171{,}9.$

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi tangenskereséseket!

1. tg 24° 44'.
2. tg 2° 30'.
3. tg 85° 20'.
4. tg 89° 50'
5. tg 28'.
6. tg 49,4°.

* Megjegyezzük, hogy tg 84° 17' = 10; tg 89° 27' = 100.

g) Arcustangens-keresés

Az előbbi művelet megfordítottja. Ennek a műveletnek a végrehajtásánál *különös gonddal* kell ügyelnünk arra, hogy a beállítást a tizedesvessző helyétől függően más és más módon kell elvégeznünk.

α) $0 \leqq \text{tg}\,\alpha \leqq 0{,}01$

illetve

β) $0{,}01 \leqq \text{tg}\,\alpha \leqq 0{,}1$ | Kis szögről lévén szó, alkalmazható az $\text{arc tg}\,x \cong \text{arc sin}\,x$ *közelítő összefüggés*. Erre a két esetre tehát az arcussinus-keresésnél leírtak a mérvadók.

γ) $0{,}1 \leqq \text{tg}\,\alpha \leqq 1$ | *Normállécen* a futó indexét ráállítjuk a *D* skála megfelelő osztására, és az eredményt a tangensosztáson olvassuk le (30. ábra).

Zseblécen a *D* skála bal oldali 1-ese fölé állítjuk a *C* skála megfelelő osztását, majd a lécet megfordítva a leolvasást a *T* skálán végezzük el (31. ábra).

δ) $1 \leqq \text{tg}\,\alpha \leqq 10$ | A visszakeresés művelete csak abban tér el a *γ* pontban leírtaktól, hogy *a beállítást* nem a *C*, hanem *az R skálán végezzük el*, és a kapott szöget 90°-ból kivonjuk (32—33. ábra).

ε) $10 \leqq \text{tg}\,\alpha \leqq 100$ | *Normállécen* a tangensérték reciprokát ϱ-val, ϱ'-vel, illetve ϱ''-vel szorozva és 90°-ból kivonva, kapjuk az eredményt.

Zseblécen az *R* skálán való beállítás után az *S* & *T* skálán leolvasott szöget 90°-ból levonjuk.

ζ) $100 < \text{tg}\,\alpha$ | Mind a normál-, mind a zseblécen a tangensérték reciprokát ϱ'-vel szorozva és 90°-ból kivonva, kapjuk az eredményt.

Példák

1. arc tg 0,00291 = 10′.
2. arc tg 0,0466 = 2° 40′.
3. arc tg 0,424 = 23°.
4. arc tg 7,6 = 90° − 7° 30′ = 82° 30′.
5. arc tg 18,5 = 90° − 3° 6′ = 86° 54′.

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi arcustangens-kereséseket!

1. arc tg 0,0052.
2. arc tg 0,0528.
3. arc tg 0,639.
4. arc tg 1,923.
5. arc tg 92,5.
6. arc tg 200.

h) Cotangenskeresés

Valamely szög cotangensét a $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ azonosság felhasználásával határozhatjuk meg.

α) $0 < \alpha \leqq 5^\circ\ (5^\circ 43')$* | $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{1}{\alpha} = \frac{\varrho'}{\alpha'} = \frac{\varrho''}{\alpha''}$ közelítő egyenlőség alapján számolunk.

β) $5^\circ\ (5^\circ 43') \leqq \alpha \leqq 45^\circ$ | Felhasználva a $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ azonosságot, a beállítást *a tangenskeresésnél leírtak* szerint végezzük el; az eredményt mind a normál-, mind a zseblécen *az R skálán olvassuk le* (30—31. ábra).

γ) $45^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ | Ezen intervallumba eső szögek cotangensének meghatározását a $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ azonosság felhasználásával 45°-*nál kisebb szögek tangensének* kiszámítására vezetjük vissza. (Lásd a tangenskeresés című fejezet megfelelő pontjait!)

Példák

1. $\operatorname{ctg} 25' = \frac{3438}{25} = 137{,}5.$
2. $\operatorname{ctg} 11^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 11^\circ} = 5{,}14.$
3. $\operatorname{ctg} 68^\circ = \operatorname{tg} 22^\circ = 0{,}404.$
4. $\operatorname{ctg} 86^\circ = \operatorname{tg} 4^\circ = 0{,}0699.$

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi cotangenskereséseket!

1. ctg 3° 10′.
2. ctg 14′.
3. ctg 41° 20′.
4. ctg 75° 10′.
5. ctg 87° 30′.
6. ctg 89° 55′.

i) Arcuscotangens-keresés

Az előbbi művelet megfordítottja. Az $\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x$ azonosság felhasználásával *ugyanazon műveleteket* végezzük el, mint az arcustangens-keresésnél, de a kapott szöget 90°-ból kivonjuk.

Példa

$\operatorname{arc\,ctg} 2 = 90^\circ - \operatorname{arc\,tg} 90^\circ - (90^\circ - 26^\circ 34') = 26^\circ 34'.$

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi arcuscotangens-kereséseket!

1. arc ctg 0,01.
2. arc ctg 0,1.
3. arc ctg 5,42.
4. arc ctg 100.
5. arc ctg 0,32.
6. arc ctg 1000.

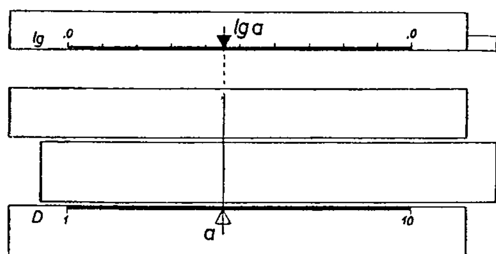
* A zárójeles érték a zseblécre vonatkozik.

5. §. LOGARITMIKUS MŰVELETEK LOGARLÉCCEL

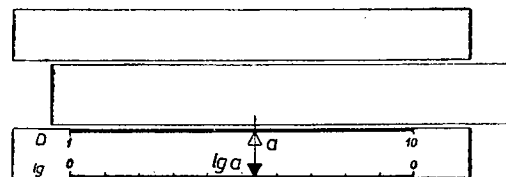
a) Logaritmus- és hatványkeresés

α) **A logaritmusskála** | Logarléc segítségével közvetlenül meg tudjuk határozni számok 10 alapú logaritmusát is. Erre a célra az úgynevezett *logaritmusskála* (*L* skála) szolgál. Ez a skála egyenletes beosztásáról ismerhető fel. Normállécen a homloklap tetején a cm-beosztás alatt, zseblécen pedig a homloklap legalján található (3—4. ábra).* A beállítás, illetve leolvasás elvégzésére a normállécen a felsőindex-meghosszabbítás szolgál.

β) **Logaritmuskeresés** | Adott szám 10 alapú logaritmusát (kitevőjét) keressük. Ezt úgy kapjuk meg, hogy a futó indexét a *D* skálán az adott számra állítjuk, majd az *L* skálán leolvassuk az index állása alapján a logaritmus (kitevő) értékét (34—35. ábra). Az így kapott érték *a logaritmus törtrésze* (mantisszája). Az egészrész (karakterisztika) ugyanúgy, mint a táblázat használatakor, külön állapítandó meg.



34. ábra



35. ábra

γ) **Hatványkeresés** | Az előbbi művelet megfordítottja: a 10 alap adott logaritmusú (kitevőjű) hatványát keressük. (Ez az úgynevezett visszakeresés.) A műveletet úgy végezzük el, hogy az adott logaritmus törtrészét (mantisszáját) az index segítségével az *L* skálán beállítjuk, majd a keresett *hatványt* az index állása alapján leolvassuk (34—35. ábra). Az egész jegyek számának megállapítása a logaritmustáblából való visszakereséshez hasonló módon történik.

δ) **Áttérés más alapra** | Az *L* skála segítségével — figyelembe véve az $^{a}\log b = \frac{\lg b}{\lg a}$ azonosságot — meghatározható bármely szám tetszőleges *a* alapú logaritmusa.

* Megemlítjük, hogy egyes külföldi normálléceknél a tolóka hátlapján helyezik el ezt a beosztást a sinus- és tangensskála között.

Példák

1. lg 954 = 2 + 0,979 = 2,979.
2. $10^{1,569} = 37,1$ (num lg 1,569 = 37,1).
3. $^{3}\log 12 = \frac{\lg 12}{\lg 3} = 2,26.$

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi logaritmus- és hatványkereséseket!

1. lg 5,62.
2. lg 0,0512.
3. lg 12,11.
4. $10^{0,983-3}$ [num lg (0,983—3)].
5. $10^{1,17}$ (num lg 1,17).
6. $10^{5,459}$ (num lg 5,459).
7. $^{3}\log 5,1$.
8. $^{4}\log 0,625$.
9. ln 3,41.

b) Lglg skála

A „*GAMMA*” normállécen a tolóka hátlapján *három skála* található (3. ábra), amelyekre a számok logaritmusának logaritmusa van felmérve. Ezek alkotják az úgynevezett lglg *beosztást*.* A felső skálán (E_1) a számozás 1,01-től 1,12-ig, a középsőn (E_2) 1,1-től 3,2-ig, az alsón (E_3) 2,5-től 10^5-ig terjed. A beállítás és leolvasás a léc bal oldali, illetve jobb oldali végén levő U alakú vájatban elhelyezett segédindex felhasználásával történik.

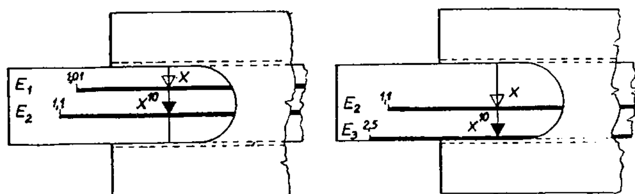
c) Műveletek lglg skálával

α) **Hatványozás**

1°. x^{10}. A műveletet a következő *lépések*ben végezzük el (36. ábra):

Megfordítjuk a lécet.

A bal vagy jobb oldali segédindex felhasználásával az E_1, illetve E_2 skálán beállítjuk az x értéket.



36. ábra

Közvetlenül a beállítás alatti skálán (E_2-n, illetve E_3-on) leolvassuk az eredményt.

Ennél a műveletnél az eredményt *helyértékével együtt* kapjuk meg.

* Megemlítjük, hogy egyes külföldi léceken az lglg skála nem három, hanem csak két részskálából áll.

Megjegyzés. Ha $x^{10} > 10^5$, azaz $x > \sqrt[10]{10^5} = \sqrt{10} = 3{,}162$, akkor ezt a műveletet csak bizonyos átalakítások után tudjuk elvégezni. (Pl. $6{,}6^{10} = (3 \cdot 2{,}2)^{10} = 3^{10} \cdot 2{,}2^{10} = 156\,800\,000$.)

Példák

1. $1{,}03^{10} = 1{,}344$. 2. $2{,}04^{10} = 1250$.

Feladatok

Végezzük el az alábbi hatványozásokat lglg skála segítségével!

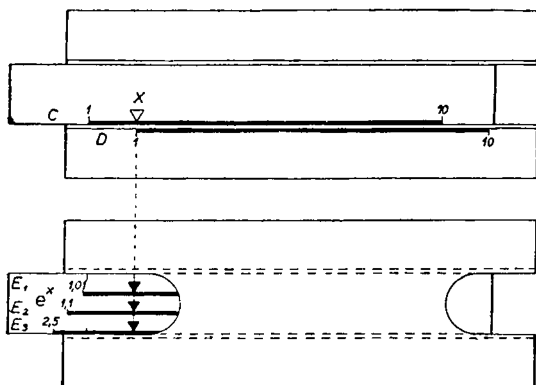
1. $1{,}112^{10}$. 2. $1{,}335^{10}$. 3. $3{,}326^{10}$.

2c. e^x. Ez a művelet elvégezhető normális és fordított tolókaállással is. Ez utóbbit akkor alkalmazzuk, ha ugyanazt a műveletet sorozatosan kell végrehajtanunk.

Normális tolókaállással a műveletet a következő lépésekben végezzük el (37. ábra):

A D skála 1-ese vagy 10-ese fölé állítjuk a C skála x értékét.

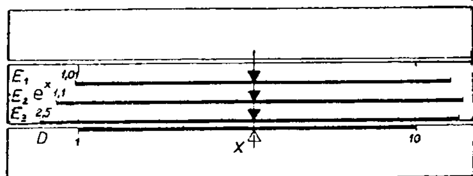
A lécet megfordítjuk, és $0{,}01 \leqq x \leqq 10{,}1$ esetén az E_1, $0{,}1 \leqq x \leqq 1$ esetén az E_2 és $1 \leqq x \leqq 10$ esetén az E_3 skálán leolvassuk a segédindex állását.



37. ábra

Fordított tolókaállással a művelet elvégzése a következő lépésekben történik (38. ábra):

A fordított tolókát alapállásba hozzuk (E_1 skála 0,01 osztása és az A skála 1-ese fedik egymást).



38. ábra

A D skálán az indexszel beállítjuk az x értéket.

Az index állását leolvassuk az E_1, E_2 vagy E_3 skálák valamelyikén, a fentebb közölt szabálynak megfelelően.

Mind normális, mind fordított tolókaállás esetén az eredményt helyértékével együtt kapjuk meg.

Megjegyzés. Ha $x > 10$, akkor ez a művelet csak bizonyos átalakítások után végezhető el. (Pl. $e^{16{,}4} = (e^{8{,}2})^2 = 3630^2 = 13\,260\,000$.)

Feladatok

Végezzük el az alábbi hatványozásokat az lglg skála segítségével!

1. $e^{5{,}1}$. 2. $e^{0{,}98}$. 3. $e^{0{,}01}$.

3°. a^x. Ez a művelet is elvégezhető mind normális, mind fordított tolókaállással.

Normális tolókaállás esetén a lécet többször kell ide-oda forgatnunk, és több beállítást kell végeznünk. Ez a számítást nehézkessé és pontatlanná teszi, ezért e műveletek végrehajtását csak fordított tolókaállással ismertetjük.

A feladat megoldása *fordított tolókaállással* a következő lépésekben történik (39. ábra):

A D skála 1-ese vagy 10-ese fölé állítjuk az E skála megfelelő a értékét.

Az index segítségével felkeressük a D skálán az x értéket.

39. ábra

Előzetes fejszámolást végezve az eredmény nagyságrendjére vonatkozóan, a megfelelő E skálán leolvassuk az eredményt.

Az első lépés elvégzése előtt megnézzük, hogy az a és x értékek egymáshoz képest *hogyan helyezkednek el* az E skálán. Ha az x az a-tól jobbra található, akkor az első lépésnél a D skála 1-esét, ha attól balra, akkor a D skála 10-esét használjuk.

Megjegyzés. $a < 1$ esetén $a^x = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^x}$ átalakítás felhasználásával számolunk.

Példák

1. $1{,}283^{1{,}65} = 1{,}51$. 2. $2{,}48^{2{,}3} = 8{,}09$. 3. $11{,}4^{3{,}53} = 5250$.

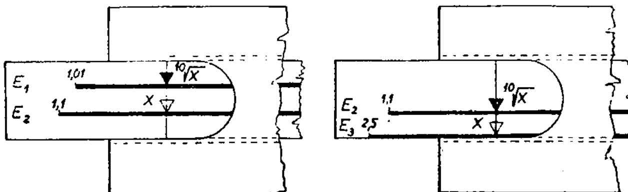
Feladatok

Végezzük el az alábbi hatványozásokat lglg skála segítségével!

1. $1{,}134^{1{,}75}$. 2. $3{,}52^{1{,}91}$. 3. $111^{1{,}242}$.

β) Gyökvonás

1°. $\sqrt[10]{x}$. E művelet az első pontban ismertetett x^{10} művelet egyik megfordítottja (40. ábra). Ennek megfelelően a beállítás az E_2, illetve E_3, a leolvasás pedig az E_1, illetve E_2 skálán történik, és az eredményt szintén *helyértékével együtt* kapjuk meg.



40. ábra

Példák

1. $\sqrt[10]{2} = 1{,}072.$

2. $\sqrt[10]{100} = 1{,}585.$

3. $\sqrt[10]{156\,700} = \sqrt[10]{2 \cdot 78\,350} = \sqrt[10]{2}\,\sqrt[10]{78\,350} = 1{,}072 \cdot 3{,}09 = 3{,}31.$

Feladatok

Végezzük el az alábbi gyökvonásokat a lglg *skála felhasználásával!*

1. $\sqrt[10]{1{,}455}.$ 2. $\sqrt[10]{4050}.$ 3. $\sqrt[10]{0{,}1954}.$

2°. $\sqrt[x]{e}$. Az $\sqrt[x]{e} = e^{x}$ azonosság felhasználásával ez a művelet visszavezethető e^{x} kiszámítására.

Normális tolókaállással a műveletet a következő lépésekben végezzük el (41. ábra):

A D skála 1-ese fölé állítjuk az R skála x értékét.

A lécet megfordítjuk, és $0{,}1 \leqq x \leqq 1$ esetén az E_3, $1 \leqq x \leqq 10$ esetén az E_2 és $10 \leqq x \leqq 100$ esetén az E_1 skálán leolvassuk a segédindex állását. Az eredmény itt is helyértékével együtt adódik.

Fordított tolókaállással a művelet ugyan elvégezhető (42. ábra), de ez a módszer semmi előnyt nem biztosít az előbbiekhez képest.

41. ábra

42. ábra

Példák

1. $\sqrt[8]{e} =$ ~~1,127~~. 1,136

2. $\sqrt[25]{e} = 1{,}0408$

3. $\sqrt[17]{e} = 1{,}0605$

Feladatok

Végezzük el az alábbi gyökvonásokat a lglg *skála felhasználásával!*

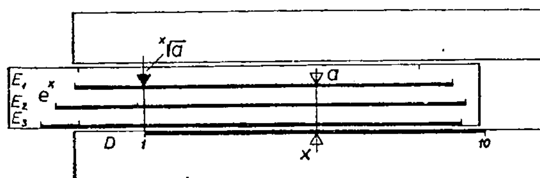
1. $\sqrt{e}.$ 2. $\sqrt[32]{e}.$ 3. $\sqrt[7]{e}.$

3° $\sqrt[x]{a}$. Ez a művelet is elvégezhető mind normális, mind fordított tolókaállással. A 41. oldalon közölt indokok miatt e művelet végrehajtását is csak fordított tolókaállással ismertetjük.

Fordított tolókaállással a műveletet a következő lépésekben végezzük el (43. ábra):

Az indexszel a *D* skálán beállítjuk az *x* értéket.

Az *E* skála *a* értékét fedésbe hozzuk az indexszel.



43. ábra

A *D* skála 1-ese vagy 10-ese fölött az *E* skálán leolvassuk a végeredményt.

Példák

1. $\sqrt[3,2]{48,5} = 3,36$. 2. $\sqrt[4,6]{1,182} = 1,037$. 3. $\sqrt[2,58]{5,59} = 1,948$.

Feladatok

Végezzük el az alábbi gyökvonásokat a lglg skála felhasználásával!

1. $\sqrt[3,3]{3}$. 2. $\sqrt[5,2]{1,44}$. 3. $\sqrt[100]{2,9}$.

γ) Logaritmuskeresés

1°. ln *x*. *Normális tolókaállással* e műveletet a következő lépésekben végezzük el (44. ábra):

Megfordítjuk a lécet.

A jobb oldali vagy bal oldali segédindex segítségével a megfelelő *E* skálán beállítjuk az *x* értéket.

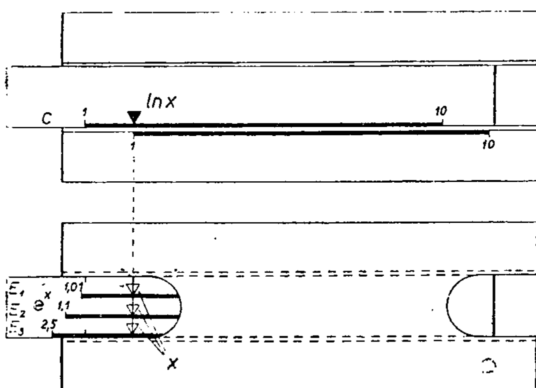
Visszafordítva a lécet, a *D* skála 1-ese vagy 10-ese fölött leolvassuk az eredményt.

Fordított tolókaállással a művelet elvégzése a következő lépésekben történik (45. ábra):

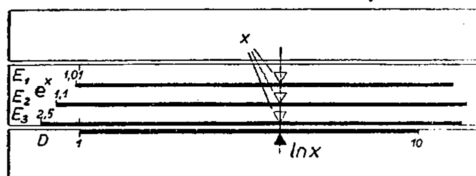
A fordított tolókát alapállásba hozzuk.

A megfelelő *E* skálán az indexszel beállítjuk az *x* értéket.

Leolvassuk az index állását a *D* skálán.



44. ábra



45. ábra

Megjegyzés. Ha $x > 10^5$, akkor x-et a művelet elvégzése előtt átalakítjuk (pl. $\ln 128\,000 = \ln (2 \cdot 64\,000) = \ln 2 + \ln 64\,000$).

Példák

1. $\ln 6{,}3 = 1{,}84$. 2. $\ln 1{,}935 = 0{,}66$. 3. $\ln 0{,}723 = -0{,}324$.

Feladatok

Végezzük el az alábbi logaritmuskereséseket a lglg *skála felhasználásával!*

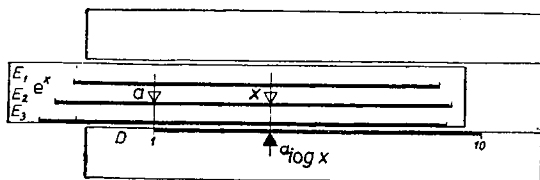
1. ln 114,2. 2. ln 1,1895. 3. ln 245 600.

2°. ${}^{a}\log x$.* E művelet végrehajtását a 41. oldalon olvasható indokolás miatt csak fordított tolókaállással ismertetjük.

Fordított tolókaállással a műveletet a következő lépésekben végezzük el (46. ábra):

A D skála 1-es vagy 10-es osztása fölé állítjuk a megfelelő E skálán az a értéket.

Az indexet az E skála x értékére állítjuk.



46. ábra

A D skálán leolvassuk az index állását.

Az első lépés elvégzése előtt megnézzük, hogy az a és x értékek egymáshoz képest *hogyan helyezkednek el az E skálán:*

Ha az x az a-tól jobbra található, akkor első lépésnél a D skála 1-esét, ha attól balra, akkor a D skála 10-esét használjuk.

Példák

1. ${}^{1,5}\log 3{,}1 = 2{,}79$. 2. ${}^{2,3}\log 9{,}4 = 2{,}690$. 3. ${}^{4,2}\log 5{,}6 = 1{,}2$.

Feladatok

Végezzük el az alábbi logaritmuskereséseket a lglg *skála felhasználásával!*

1. ${}^{1,36}\log 2{,}5$. 2. ${}^{6,8}\log 154$. 3. ${}^{2}\log 103$.

b) Ha a lécen nincs lglg skála

Ilyen esetben (pl. zsebléceken) a leírt — hatványozással és gyökvonással kapcsolatos — műveleteket a $\lg a^k = k \cdot \lg a$ azonosság felhasználásával a C, D, illetve L skálákkal a következő *lépésekben* végezzük el (47. ábra):

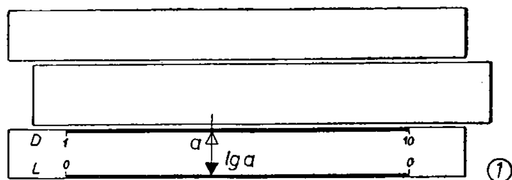
Az L skála segítségével meghatározzuk $\lg a$ értékét.

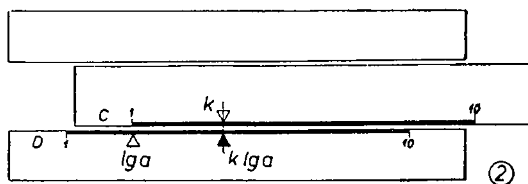
Az így kapott értéket beállítjuk a D skálán.

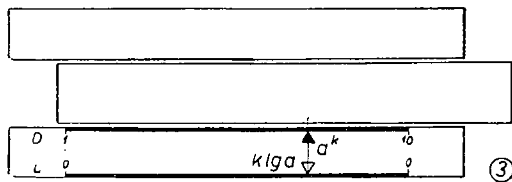
* E feladat a műszaki gyakorlatban általában inverz alakjában jelentkezik (pl. $2{,}3^x = 9{,}4$, ebből $x = {}^{2,3}\log 9{,}4$).

A D skálán beállított értéket megszorozzuk k-val.

Az L skála segítségével visszakeressük a $k \cdot \lg a$ értéket.







47. ábra

Példák

1. $2{,}5^{4{,}3} = 51{,}4$. 2. $\sqrt[5]{765} = 3{,}79$. 3. $e^{5{,}82} = 337$.

Feladatok

Végezzük el az alábbi hatványozásokat, illetve gyökvonásokat az L skála felhasználásával!

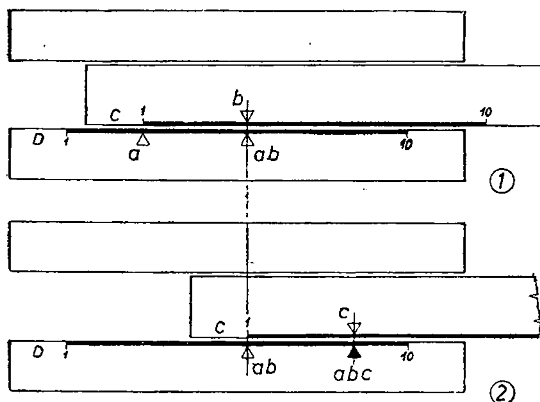
1. $2{,}53^{4{,}98}$. 2. $\sqrt[9{,}8]{0{,}428}$. 3. $\sqrt[7{,}2]{e}$.

6. §. KÜLÖNLEGES MŰVELETEK LOGARLÉCCEL

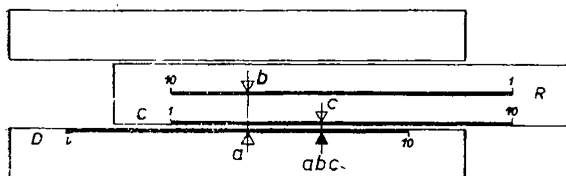
a) Ismételt szorzás, osztás

Ebben a fejezetben néhány egyszerűbb összetett művelet részletesebb leírását közöljük.

Az összetett műveletek elvégzésénél arra törekedünk, hogy a feladatokat *minimális számú lécbeállítással és lécleolvasással* végezzük el. *Részleteredményeket* általában nem olvasunk le, hanem ezeket pusztán az indexszel rögzítjük. *A helyérték* megállapítása az összetett műveleteknél is ugyanazokkal a módszerekkel történik, mint az eddig tárgyalt alapműveleteknél.



48. ábra



49. ábra

α) abc | Kétféle módon végezhető el.

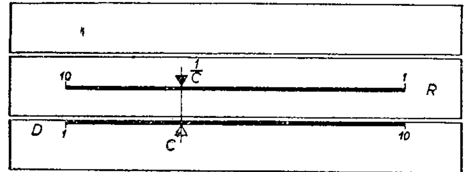
A *C* és *D* skálával (48. ábra) az *ab* szorzás eredményét az indexszel rögzítjük, de nem olvasunk le, és az így kapott eredményt *c*-vel továbbszorozzuk.

A *D* és *R* skálával (49. ábra): az $abc = \frac{a}{\frac{1}{b}} c$ azonosság alapján.

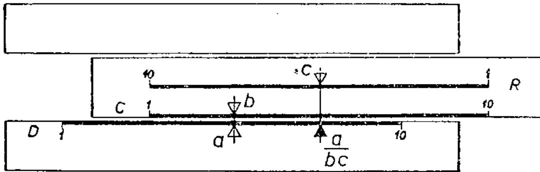
Hasonló módon járunk el többtényezős szorzat esetén is.

β) $\frac{a_1 b_1 c_1 \ldots}{a_2 b_2 c_2 \ldots}$ | A művelet elvégzését *osztással kezdjük* $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$, *majd szorzással folytatjuk* $\left(\frac{a_1}{a_2} b_1\right)$, majd újra osztunk $\left(\frac{a_1}{a_2} \frac{b_1}{b_2}\right)$ *és így tovább*. Ha más sorrendben végezzük a műveletet, akkor rendszerint több lécmozgatásra van szükség.

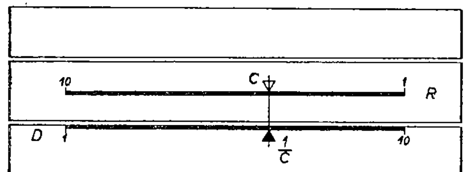
A fentebbi típus *speciális esetenként* megemlítjük az $\frac{a}{bc}$ alakú kifejezést (50. ábra). Ennél először az osztást végezzük el $\left(\frac{a}{b}\right)$, majd tovább osztunk c-vel. Ha ez utóbbi osztást a reciprok skála segítségével végezzük el, akkor az egész művelet általában egy beállítással elvégezhető.



Az $a = 1$, $b = 1$ esetén ez a típus $\frac{1}{c}$ kiszámítására (azaz egy szám *reciprokának*



50. ábra

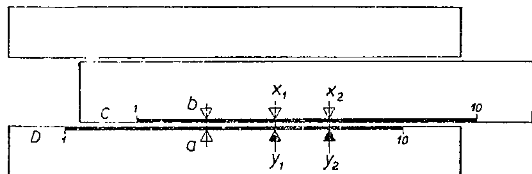


51. ábra

kiszámítására) redukálódik (51. ábra). A tolókát alapállásba hozva a D skálán az indexszel beállítjuk a c értéket, és az eredményt a reciprok skálán olvassuk le; vagy fordítva: a reciprok skálán állítjuk be a c értéket, és a D skálán olvasunk le.

γ) $y = \frac{a}{b} x$ alakú kifejezés

Az y értéke (a, b adott konstansok) tetszőleges x érték esetén gyorsan számítható (52. ábra). $\left(\frac{y}{x} = \frac{a}{b}\right.$-ből következik, hogy y és x-nek *ugyanaz a viszonya,* mint az adott a és b-nek.) Az $\frac{a}{b}$ hányadost logarlécen beállítva a tetszőleges x-hez tartozó y érték azonnal leolvasható.



52. ábra

Példák

1. $$\frac{1{,}26 \cdot 8{,}75 \cdot 2{,}38 \cdot 532}{9{,}28 \cdot 3{,}14 \cdot 47{,}5 \cdot 1{,}22} = \frac{1{,}26 \cdot 8{,}75 \cdot 2{,}38 \cdot 5{,}32 \cdot 10^2}{9{,}28 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}75 \cdot 10^1 \cdot 1{,}22} = 0{,}826 \cdot 10^1 = 8{,}26.$$

2. $$\frac{5{,}25 \cdot 4{,}3}{9{,}18} = 2{,}46.$$

3. $$\frac{4520}{6{,}28 \cdot 0{,}0017} = \frac{4{,}52 \cdot 10^3}{6{,}28 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-3}} = 0{,}424 \cdot 10^6 = 424\,000.$$

4. $$\frac{1}{1720} = 0{,}000\,581.$$

5. $2{,}63 \cdot 8{,}7 \cdot 0{,}56 = 12{,}81.$

6. A normál tégla 0,25 m hosszú, 1,2 dm széles és 6,5 cm magas. Mekkora a térfogata m³-ben?

$V = 0{,}25 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}065 = 2{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-1} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-2} = 19{,}5 \cdot 10^{-4} = 0{,}00195 \text{ m}^3.$

7. Egy alapgödör hossza 10,20 m, szélessége 6,40 m, mélysége 1,20 m. Hány m³-es az alapgödör?

$$V = 10{,}20 \cdot 6{,}40 \cdot 1{,}20 = 78{,}3 \text{ m}^3.$$

8. Egy $s = 260$ cm széles vasbetonlemezbe összesen $F_v = 22{,}68$ cm² keresztmetszeti területű vasbetét szükséges. Milyen t távolságra kell egymástól a 10 mm átmérőjű vasakat elhelyezni, ha egy ilyen vas keresztmetszeti területe $f = 0{,}785$ cm²?

$$t = \frac{sf}{F_v} = \frac{260 \cdot 0{,}785}{22{,}68} = \frac{2{,}6 \cdot 10^2 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-1}}{2{,}268 \cdot 10^1} = 9{,}00 \text{ cm}.$$

9. Mekkora a vágási sebesség egy 125 mm átmérőjű munkadarab megmunkálásánál, ha a fordulatszám $n = 350$ ford/s?

$$v = \frac{d\pi \cdot n}{1000} = \frac{12{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 350}{1000} = 13{,}74 \text{ m/s}.$$

10. Hány A erősségű áramot vesz fel egy 110 V feszültségű, 25 LE 3 fázisú motor, amelynek fázisszöge $\cos\varphi = 0{,}85$, és hatásfoka $\eta = 0{,}85$?

$$I = \frac{N\,736}{1{,}73\,U\eta\cos\varphi} = \frac{25 \cdot 736}{1{,}73 \cdot 110 \cdot 0{,}89 \cdot 0{,}85} =$$

$$= \frac{2{,}5 \cdot 10^1 \cdot 7{,}36 \cdot 10^2}{1{,}73 \cdot 1{,}1 \cdot 10^2 \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-1} \cdot 8{,}5 \cdot 10^{-1}} = 0{,}1278 \cdot 10^3 = 127{,}8 \text{ A}.$$

11. Két 10 cm széles és 800 cm hosszú sztaniollemez közé 0,002 cm vastag paraffinozott papírszalagot teszünk ($\varepsilon = 2{,}8$). Az egészet összetekercselve egy tömbkondenzátort kapunk. Mekkora ennek a kapacitása?

$$C = \frac{\varepsilon F}{4\pi d} = \frac{2{,}8 \cdot 8000}{12{,}56 \cdot 0{,}002} = 892\,000 \text{ cm}.$$

12. Mekkora egy $d = 500$ mm átmérőjű csőben $c = 2$ m/s sebesség és $v = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ m²/s kinematikai viszkozitás mellett az áramlás *Reynolds*-száma?

$$R = \frac{dc}{v} = \frac{0{,}5 \cdot 2}{1{,}3 \cdot 10^{-6}} = 769\,000.$$

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi ismételt szorzás-osztásokat!

1. $\dfrac{54{,}1 \cdot 0{,}065}{0{,}019 \cdot 981}$.

2. $\dfrac{3500 \cdot 1{,}8}{0{,}000\,027}$.

3. $\frac{3{,}2}{2\,150\,000 \cdot 0{,}000\,000\,51}$.

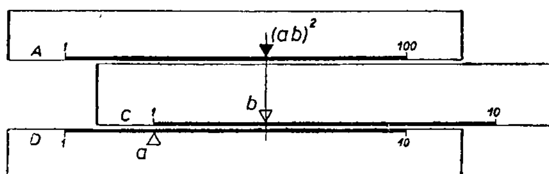
4. $\frac{1}{0{,}01\overline{3}}$.

5. $0{,}42 \cdot 6{,}12 \cdot 491$.

b) Négyzetre emeléssel kapcsolatos összetett műveletek

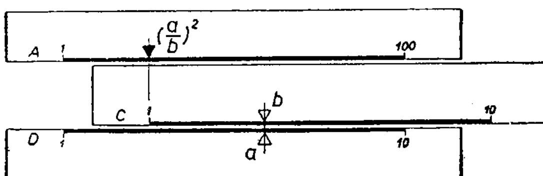
Alábbiakban néhány gyakrabban előforduló négyzetre emeléssel kapcsolatos összetett műveletet ismertetünk. *A beállítás és leolvasás módját* ábrák szemléltetik.

$(ab)^2$



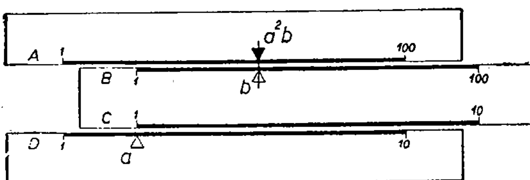
53. ábra

$\left(\frac{a}{b}\right)^2$



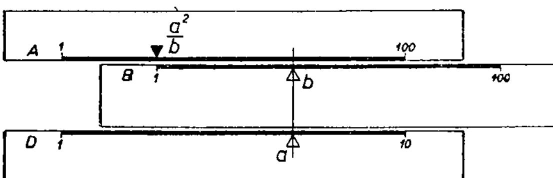
54. ábra

a^2b



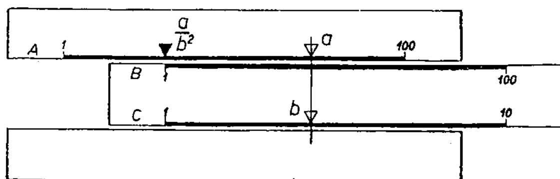
55. ábra

$\frac{a^2}{b}$



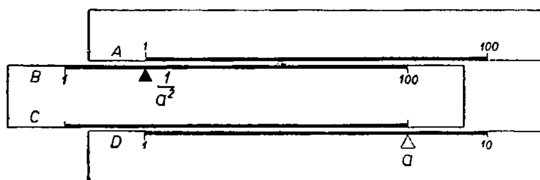
56. ábra

$\frac{a}{b^2}$



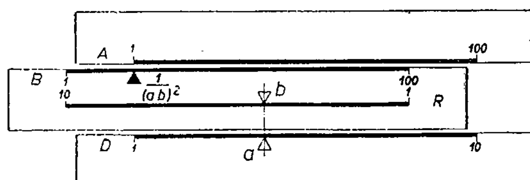
57. ábra

$\frac{1}{a^2}$



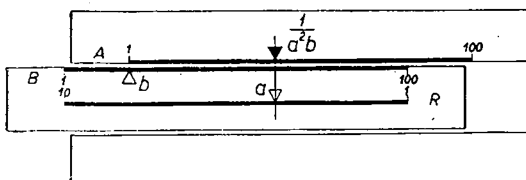
58. ábra

$\frac{1}{(ab)^2}$



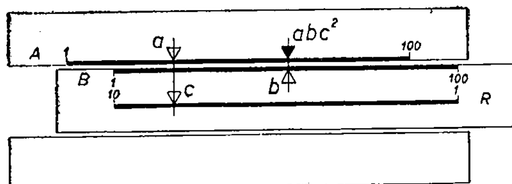
59. ábra

$\frac{1}{a^2b}$



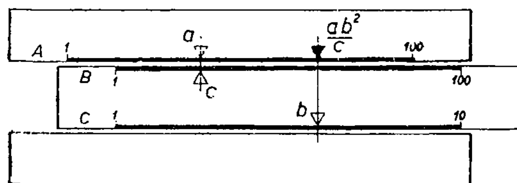
60. ábra

abc^2



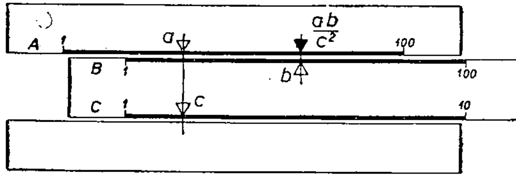
61. ábra

$\frac{ab^2}{c}$



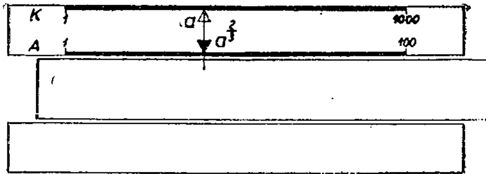
62. ábra

$\frac{ab}{c^2}$



63. ábra

$a^{2/3}$



64. ábra

P é l d á k

1. $(5{,}23 \cdot 0{,}187)^2 = 0{,}957.$

2. $\left(\frac{426}{0{,}63}\right)^2 = 457\,000.$

3. $5{,}18^2 \cdot 0{,}042 = 5{,}18^2 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-2} = 112{,}5 \cdot 10^{-2} = 1{,}125.$

4. $\frac{0{,}0415^2}{642} = \frac{4{,}15^2 \cdot 10^{-4}}{6{,}42 \cdot 10^2} = 2{,}68 \cdot 10^{-6} = 0{,}000\,002\,68.$

5. $\frac{384}{6{,}3^2} = 9{,}67.$

6. $\frac{1}{0{,}52^2} = 3{,}7.$

7. $\frac{1}{(6{,}7 \cdot 4{,}3)^2} = 0{,}0012.$

8. $\frac{1}{0{,}13^2 \cdot 0{,}51} = 116.$

9. $6{,}2 \cdot 44 \cdot 0{,}026^2 = 6{,}2 \cdot 4{,}4 \cdot 10^1 \cdot (2{,}6 \cdot 10^{-2})^2 =$
$= 6{,}2 \cdot 4{,}4 \cdot 2{,}6^2 \cdot 10^{-3} = 184{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}1845.$

10. $\frac{5{,}3}{1{,}2^2 \cdot 7} = 0{,}526.$

11. $\frac{5{,}7 \cdot 4{,}9}{0{,}000\,03^2} = \frac{5{,}7 \cdot 4{,}9}{3^2 \cdot 10^{-10}} = 3{,}1 \cdot 10^{10}.$

12. $7{,}2^{2/3} = 3{,}73.$

13. Egy gömb átmérője $d = 68$ mm. Mekkora a felszíne?

$$F = \pi d^2 = 3{,}14 \cdot 6{,}8^2 = 145{,}3 \text{ cm}^2.$$

14. Számítsuk ki egy $a = 6{,}5$ cm, $b = 8{,}4$ cm oldalhosszúságú téglalap alakú lemez súlyponti tengelyeire vett deviációs nyomatékát!

$$I = \frac{a^2 \cdot b^2}{4} = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 = (6{,}5 \cdot 4{,}2)^2 = 745 \text{ cm}^4.$$

15. Számítsuk ki az előző példában szereplő lemez rövidebbik oldalával párhuzamos súlyponti tengelyére vett inercianyomatékát!

$$I = \frac{ab^3}{12} = ab^2 \frac{b}{12} = 6{,}5 \cdot 8{,}4^2 \cdot \frac{8{,}4}{12} = 321 \text{ cm}^4.$$

(A feladatot ab^2 mintájára oldjuk meg $(6{,}5 \cdot 8{,}4^2)$, majd a felső skálákon osztunk 12-vel és szorzunk 8,4-del.)

16. Számítsuk ki egy $r = 12{,}5$ cm sugarú körlemez inercianyomatékát egy átmérőjére vonatkozólag!

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{4}(r \cdot r)^2 = \frac{\pi}{4}(12{,}5 \cdot 12{,}5)^2 = 19\,200 \text{ cm}^4.$$

17. Számítsuk ki egy $l = 8{,}60$ m nyílású, $p = 2{,}5$ kp/cm egyenletesen megoszló erővel terhelt kéttámaszú tartón a maximális nyomatékot!

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{2{,}5 \cdot 860^2}{8} = \frac{2{,}5 \cdot 8{,}6^2}{8} 10^4 = 231\,100 \text{ kp/cm}.$$

18. Számítsuk ki az előbbi példában szereplő kéttámaszú tartó maximális lehajlását! ($E = 2\,150\,000$ kp/cm², $I = 1663$ cm⁴.)

$$f_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{p}{EI}(l \cdot l)^2 = \frac{5 \cdot 2{,}5}{384 \cdot 2\,150\,000 \cdot 1663}(860 \cdot 860)^2 =$$

$$= \frac{5 \cdot 2{,}5}{3{,}84 \cdot 10^2 \cdot 2{,}15 \cdot 10^6 \cdot 1{,}663 \cdot 10^3}(8{,}6 \cdot 8{,}6)^2 \cdot 10^8 = 4{,}95 \text{ cm}.$$

(A feladatot $(ab)^2$ mintájára oldjuk meg; az ezt követő szorzásokat és osztásokat a felső skálákon végezzük el.)

19. Egy ívlámpa előtétellenállása $R = 4\Omega$; a rajta átfolyó áram erőssége $I = 5{,}5$ A. Hány watt alakul át rajta hővé?

$$N = I^2 R = 5{,}5^2 \cdot 4 = 121 \text{ W}.$$

20. Az egyenletes sebességgel mozgó testre ható légellenállás (w) a sebesség (v) négyzetével arányos. $v = 18{,}2$ m/s esetén $w = 35{,}2$ kp. Mekkora a légellenállás $v = 15$ m/s esetén?

$$w = cv^2; \qquad c = \frac{w}{v^2} = \frac{35{,}2}{18{,}2^2} = 0{,}1063.$$

$$w = 0{,}1063\, v^2 = 0{,}1063 \cdot 15^2 = 23{,}9 \text{ kp}.$$

21. Egy derékszögű háromszög egyik befogója $b = 6{,}3$ cm; a befogó vetülete az átfogón $c_1 = 4{,}1$ cm. Mekkora a háromszög átfogója?

$$c = \frac{b^2}{c_1} = \frac{6{,}3^2}{4{,}1} = 9{,}68 \text{ cm}.$$

Feladatok

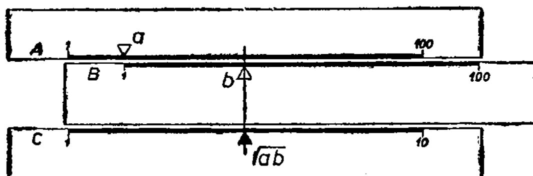
Végezzük el logarléccel az alábbi műveleteket!

1. $(1741 \cdot 0{,}0067)^2$.
2. $\left(\frac{523}{7645}\right)^2$.
3. $0{,}000\,065^2 \cdot 521$.
4. $\frac{2170^2}{0{,}412}$.
5. $\frac{0{,}0083}{7{,}2^2}$.
6. $\frac{1}{71{,}4^2}$.
7. $\frac{1}{(5{,}2 \cdot 4{,}3)^2}$.
8. $\frac{1}{0{,}072^2 \cdot 2{,}91}$.
9. $0{,}59 \cdot 4{,}3 \cdot 1{,}19^2$.
10. $\frac{2{,}5 \cdot 8{,}3^2}{5{,}6}$.
11. $\frac{6{,}2 \cdot 7320}{0{,}052^2}$.
12. $0{,}051^{2/3}$.

c) Négyzetgyökvonással kapcsolatos összetett műveletek

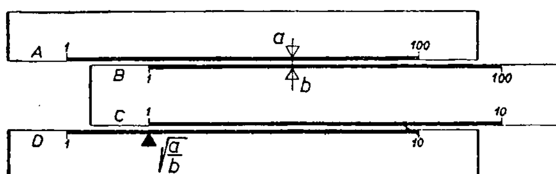
Alábbiakban néhány gyakrabban előforduló négyzetgyökvonással kapcsolatos összetett műveletet ismertetünk. *A beállítás és leolvasás módját* ábrák szemléltetik.

$\sqrt{ab}$



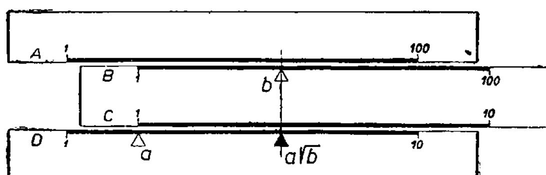
65. ábra

$\sqrt{\frac{a}{b}}$



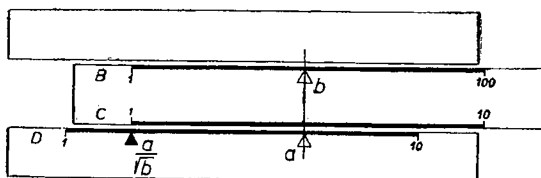
66. ábra

$a\sqrt{b}$



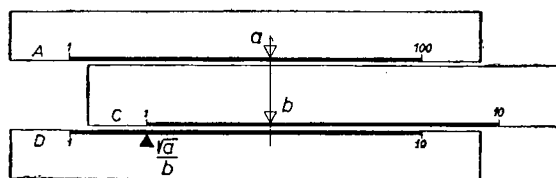
67. ábra

$\frac{a}{\sqrt{b}}$



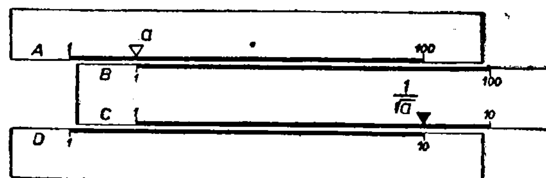
68. ábra

$\frac{\sqrt{a}}{b}$



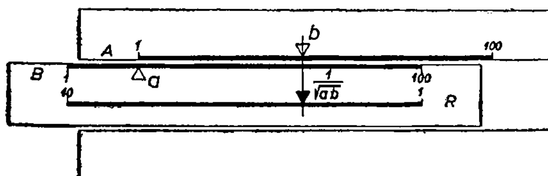
69. ábra

$\frac{1}{\sqrt{a}}$



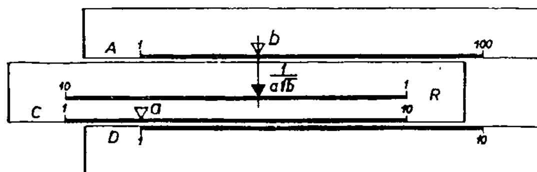
70. ábra

$\frac{1}{\sqrt{ab}}$



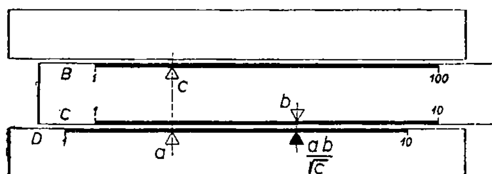
71. ábra

$\frac{1}{a\sqrt{b}}$



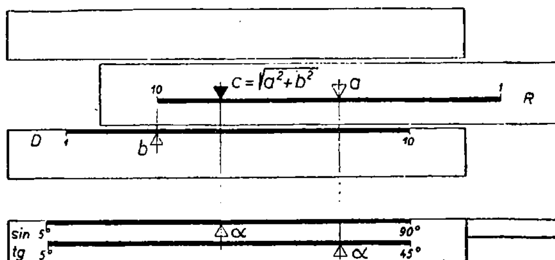
72. ábra

$\frac{ab}{\sqrt{c}}$



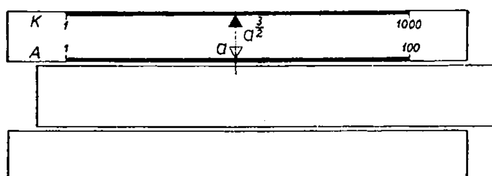
73. ábra

$\sqrt{a^2+b^2}$



74. ábra

a^3



75. ábra

Példák

1. $\sqrt{22{,}48 \cdot 0{,}000\,057} = \sqrt{22{,}48 \cdot 57 \cdot 10^{-6}} = 35{,}8 \cdot 10^{-3} = 0{,}0358.$

2. $\sqrt{\frac{11{,}4}{15\,400}} = \sqrt{\frac{11{,}4}{1{,}54 \cdot 10^4}} = 2{,}72 \cdot 10^{-2} = 0{,}0272.$

3. $6{,}3 \cdot \sqrt{1954} = 278.$

4. $\frac{7{,}23}{\sqrt{0{,}05}} = 32{,}4.$

5. $\frac{\sqrt{1,9}}{0,25} = 5,51.$

6. $\frac{1}{\sqrt{0,037}} = 5,20.$

7. $\frac{1}{\sqrt{1190 \cdot 0,098}} = 0,925.$

8. $\frac{1}{0,081\sqrt{2}} = 8,72.$

9. $\frac{6,42 \cdot 8,29}{\sqrt{261}} = 3,295.$

10. $\sqrt{2,5^2 + 7,2^2} = 7,62.$

11. $0,012^{3/2} = 0,001\ 32.$

12. Egy derékszögű háromszögben a befogók vetületei az átfogón: $c_1 = 2$ cm és $c_2 = 6,3$ cm. Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság?

$$c = \sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{2 \cdot 6,3} = 3,55 \text{ cm.}$$

13. Egy elektroncsőben az anódfeszültség $U_A = 500$ V. Mekkora az elektronok sebessége?

$$v = 594\sqrt{U_A} = 594\sqrt{500} = 13\,280 \quad \text{m/s.}$$

14. Egy matematikai inga hossza $l = 0,201$ m. Mekkora a lengési ideje?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 6,28\sqrt{\frac{0,201}{9,81}} = 0,898 \quad \text{s.}$$

(A feladatot $\sqrt{\frac{a}{b}}$ mintájára oldjuk meg, majd a felső skálákon szorzunk 2π-vel.)

15. Számítsuk ki a *b*) 15. példában szereplő téglalap alakú lemez rövidebbik oldalával párhuzamos súlyponti tengelyéhez tartozó inerciasugarát!

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{321}{6,5 \cdot 8,4}} = 2,42 \text{ cm.}$$

(Az ismételt osztást a felső skálákon végezzük el!)

16. Készítsünk az $y = \frac{2,70}{\sqrt{x}}$ függvényre értéktáblázatot!

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	2,70	2,20	1,91	1,71	1,56	1,44	1,35

17. Légüres térben a h magasságból leeső test végsebességét a $v = \sqrt{2gh} = 4{,}43\sqrt{h}$ képlet szolgáltatja. Mekkora a $h = 112$ m magasságból leeső test végsebessége?

$$v = 4{,}43 \cdot \sqrt{h} = 4{,}43\sqrt{112} = 46{,}9 \text{ m/s}.$$

18. Ismerve a Föld és a Mars Nap körüli keringési idejét ($T_F = 365$ nap, $T_M = 686$ nap), valamint az elliptikus Földpálya nagytengelyét ($d_F = 3 \cdot 10^8$ km), számítsuk ki a Mars pályájának nagytengelyét.

Kepler 3. törvénye alapján:

$$d_M = d_F \left(\frac{T_M}{T_F}\right)^{2/3} = 3 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{686}{365}\right)^{2/3} = 3 \cdot 10^8 \cdot 1{,}88^{2/3} = 4{,}57 \cdot 10^8 \text{ km}.$$

(A feladatot $a^{2/3}$ mintájára oldjuk meg, az osztás előzetes, a szorzás utólagos elvégzésével.)

Feladatok

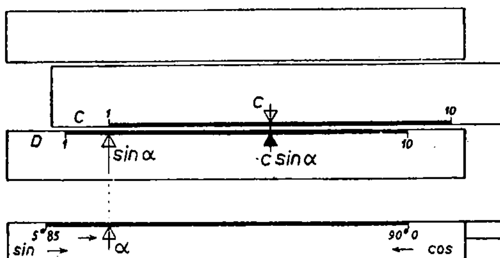
Végezzük el az alábbi műveleteket logarléccel!

1. $\sqrt{3410 \cdot 0{,}009}$.
2. $\sqrt{\dfrac{23\,000}{0{,}763}}$.
3. $2430 \cdot \sqrt{0{,}0017}$.
4. $\dfrac{0{,}081}{\sqrt{427}}$.
5. $\dfrac{\sqrt{0{,}0063}}{521}$.
6. $\dfrac{1}{\sqrt{1520}}$.
7. $\dfrac{1}{\sqrt{9870 \cdot 0{,}00052}}$.
8. $\dfrac{1}{17{,}5 \cdot \sqrt{23{,}2}}$.
9. $\dfrac{41{,}3 \cdot 5{,}42}{\sqrt{20{,}1}}$.
10. $\sqrt{0{,}79^2 + 0{,}11^2}$.
11. $5{,}72^{3/2}$.

d) Trigonometrikus értékekkel kapcsolatos összetett műveletek

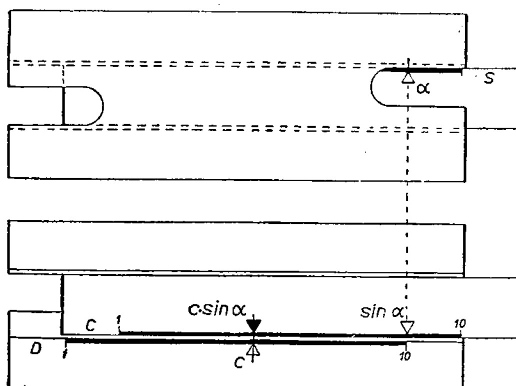
Alábbiakban néhány gyakrabban előforduló trigonometrikus értékekkel kapcsolatos összetett műveletet ismertetünk. *A lécbeállítás és leolvasás módját* ábrák szemléltetik.

$c \sin \alpha$



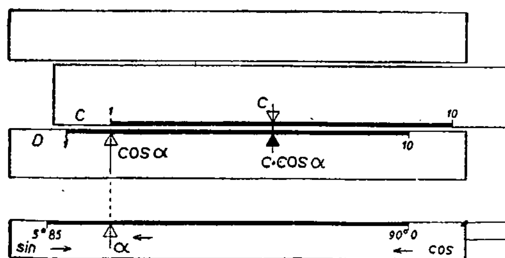
76. ábra

$c \sin \alpha$

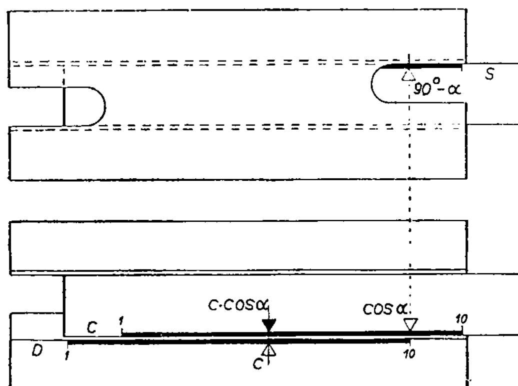


77. ábra

$c \cos \alpha$

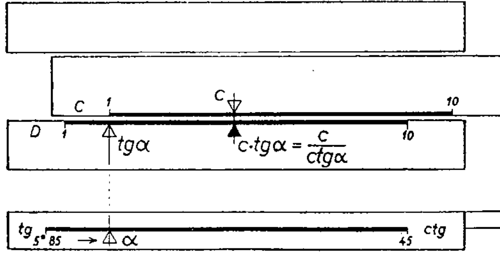


78. ábra

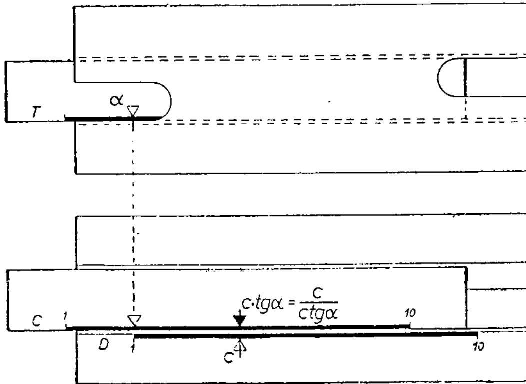


79. ábra

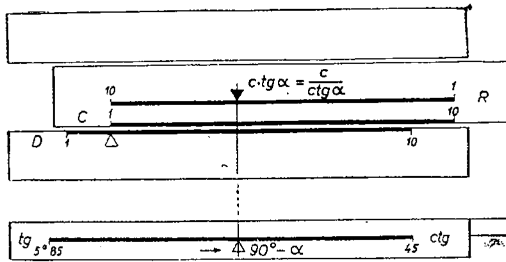
$$c \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{\operatorname{ctg} \alpha}$$



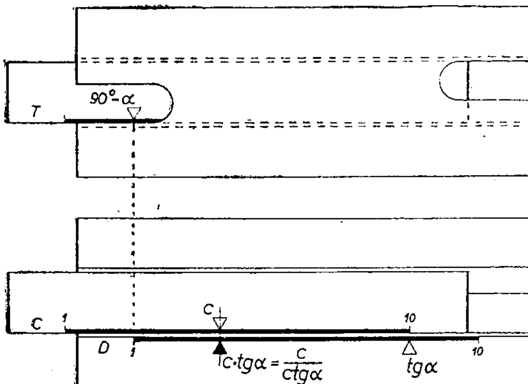
80. ábra



81. ábra

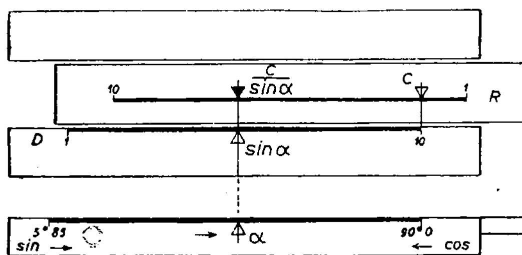


82. ábra

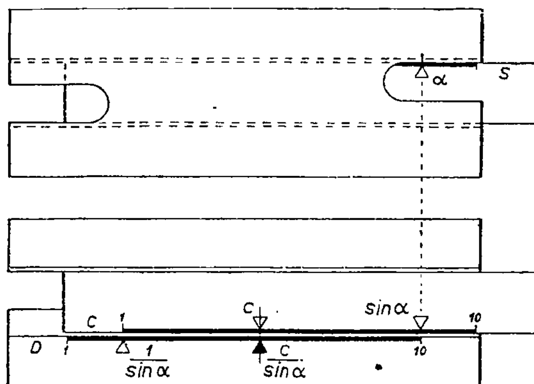


83. ábra

$\frac{c}{\sin\alpha}$

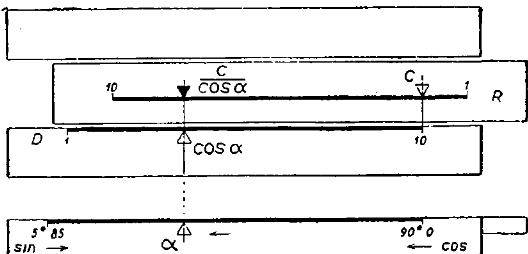


84. ábra

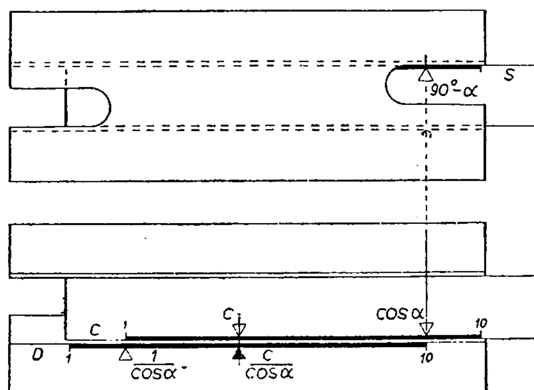


85. ábra

$\frac{c}{\cos\alpha}$

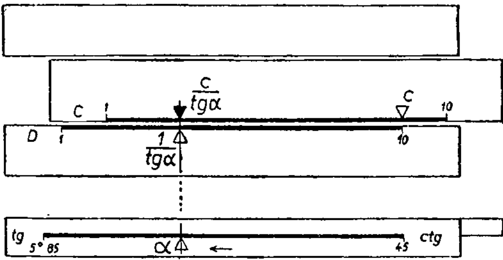


86. ábra

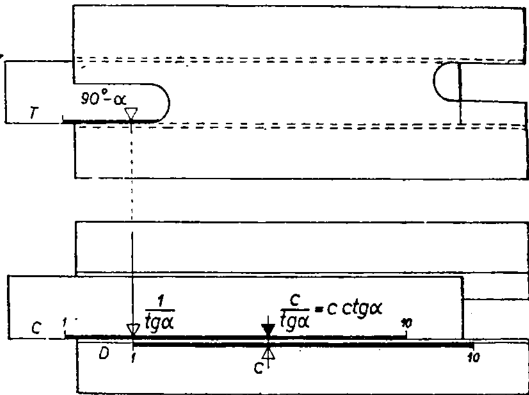


87. ábra

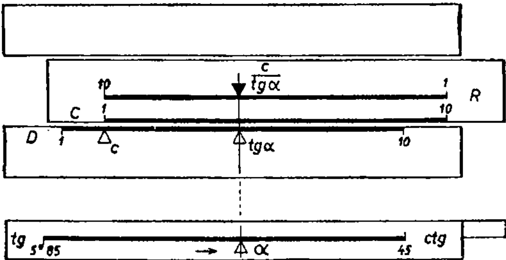
$$\frac{c}{\operatorname{tg}\alpha} = c \operatorname{ctg}\alpha$$



88. ábra

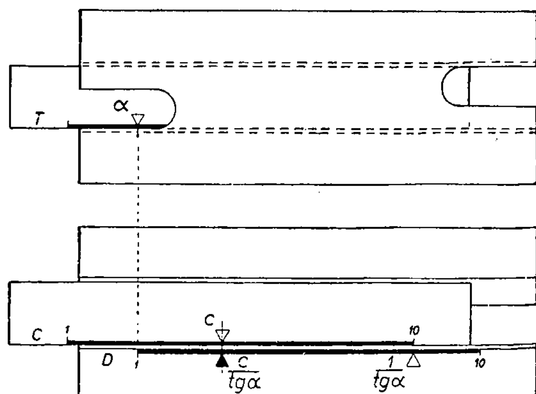


89. ábra



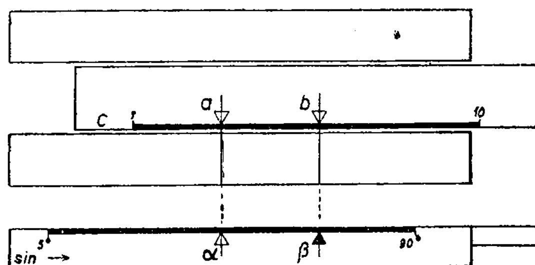
90. ábra

$$\frac{c}{\mathrm{tg}\alpha} = c\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$



91. ábra

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \text{ (sinustétel)}$$



92. ábra

P é l d á k

1. $5{,}1 \sin 32° = 2{,}7.$

2. $0{,}43 \cos 11° = 0{,}421.$

3. $2{,}1 \,\mathrm{tg}\, 7° 30' = 0{,}278.$

4. $0{,}74 \,\mathrm{ctg}\, 56° 18' = 0{,}47.$

5. $\frac{2{,}1}{\sin 55°} = 2{,}56.$

6. $\frac{0{,}91}{\cos 69° 10'} = 2{,}58.$

7. $\frac{563}{\mathrm{ctg}\, 52°} = 722.$

8. $\frac{0{,}049}{\mathrm{tg}\, 6° 20'} = 0{,}441.$

9. Egy derékszögű háromszög egyik befogója $a = 6,3$ m; a befogó melletti hegyesszög $\beta = 25°$. Mekkora a másik befogó?

$$b = a \operatorname{tg} \beta = 6,3 \operatorname{tg} 25° = 2,94 \text{ m}.$$

10. Egy derékszögű háromszög egyik befogója $a = 720$ m; a befogóval szemben levő szög $\alpha = 11° 20'$. Mekkora az átfogó?

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{720}{\sin 11° 20'} = 3660 \text{ m}.$$

11. Egy háromszög szögei $\alpha = 22°$, $\beta = 34° 30'$; az α szöggel szemben fekvő oldala $a = 5,2$ m. Mekkora a b oldal?
A beállítást a 92. ábra szerint elvégezve, eredményül $b = 7,86$ m-t kapunk.

12. Egy háromszög oldalai $a = 542$ m, $b = 195$ m; az a oldallal szemben fekvő szöge $\alpha = 52° 10'$. Mekkora a β szög?
A beállítást a 92. ábra szerint elvégezve, eredményül $\beta = 16° 30'$-et kapunk.

13. Egy $Q = 2500$ kp súlyú testet $\alpha = 35°$-os hajlású és $\mu = 0,42$ súrlódási tényezőjű lejtőn felfelé vontatunk. Mekkora a vontatóerőnek ellenszegülő súrlódóerő?

$$S = \mu Q \cos \alpha = 0,42 \cdot 2500 \cdot \cos 35° = 602 \text{ kp}.$$

Feladatok

Végezzük el logarléccel az alábbi műveleteket!

1. $0,92 \sin 46° 20'$.
2. $5370 \cos 55° 31'$.
3. $0,023 \operatorname{tg} 12° 15'$.
4. $142 \operatorname{ctg} 34° 30'$.
5. $\dfrac{0,23}{\sin 6,3°}$.
6. $\dfrac{5,2}{\cos 9,14°}$.
7. $\dfrac{86}{\operatorname{tg} 70° 5'}$.
8. $\dfrac{0,192}{\operatorname{ctg} 15° 25'}$.

e) Trinom egyenletek megoldása logarléccel

α) Másodfokú egyenlet megoldása logarléccel

A másodfokú egyenlet általános alakja:

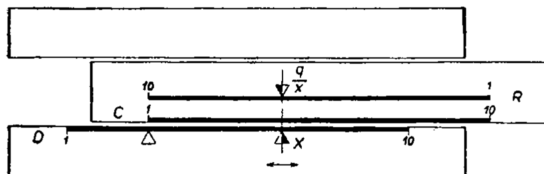
$$x^2 + px + q = 0;$$

átrendezve:

$$x + \frac{q}{x} = -p.$$

Ezen alak felhasználásával a másodfokú egyenlet megoldása logarléccel a következő *lépések*ben történik (93. ábra):

A C skála 1-es vagy 10-es osztását ráállítjuk a D skála q értékére. Az indexet elmozdítva a D és R skálákon olyan egymás fölött elhelyezkedő értékeket keresünk, amelyeknek $q > 0$ mellett az összege ($q < 0$ mellett a különbsége) egyenlő lesz $-p$-vel.



93. ábra

Ezek az értékek lesznek *egyenletünk gyökei,* mivel ekkor fennáll, hogy

$$x + \frac{q}{x} = -p.$$

Példák

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket logarléccel!

1. $x^2 - 5{,}2x + 6{,}51 = 0.$

A C skála 10-es osztását ráállítjuk a D skála 6,5,1 osztására; az indexet megfelelő módon elmozgatva, a D skálán $x = 2{,}1$-et és ez alatt az R skálán $\frac{q}{x} = 3{,}1$-et olvasunk le; ezek összege $-p = 5{,}2$. Egyenletünk gyökei tehát $x_1 = 2{,}1$ és $x_2 = 3{,}1$.

2. $x^2 - 4{,}4x - 6{,}05 = 0.$

A C skála 10-es osztását ráállítjuk a D skála 6,0,5 osztására; az indexet megfelelő módon elmozgatva, a D skálán $x = 5{,}5$-et és ez alatt az R skálán $\frac{q}{x} = 1{,}1$-et olvasunk le; ezek különbsége $-p = 4{,}4$. Egyenletünk gyökei tehát $x_1 = 5{,}5$ és $x_2 = -1{,}1$.

3. $x^2 + 7{,}2x + 12{,}47 = 0.$

A C skála 1-es osztását ráállítjuk a D skála 1,2,4,7 osztására; az indexet megfelelő módon elmozgatva, a D skálán $x = 2{,}9$-et, az R skálán $\frac{q}{x} = 4{,}3$-et olvasunk le; ezek összege $-p = -7{,}2$. Egyenletünk gyökei tehát: $x_1 = -4{,}3$ és $x_2 = -2{,}9$.

Feladatok

Oldjuk meg logarléccel az alábbi egyenleteket!

1. $x^2 - 10{,}9x + 21{,}7 = 0.$
2. $x^2 - 13{,}5x - 28{,}4 = 0.$
3. $x^2 + 52{,}7x + 75 = 0.$

β) Harmadfokú egyenlet megoldása logarléccel

A harmadfokú egyenlet általános alakja:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Ez az egyenlet megfelelő transzformációval mindig visszavezethető a

$$z^3 + pz + q = 0$$

trinom alakra. Ezt *átrendezve* a

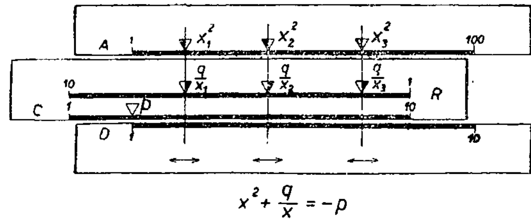
$$z^2 + \frac{q}{z} = -p$$

alakra jutunk.

A megoldás a következő *lépésekben* történik (94. ábra):

A C skála 1-es vagy 10-es osztását ráállítjuk a D skála q értékére.

Az indexet elmozdítva az A és R skálákon olyan egymás fölött elhelyezkedő értékeket keresünk, amelyeknek összege, illetve különbsége egyenlő $-p$-vel.



94. ábra

Az A skálán ilyen módon leolvasott értékekből *a gyökök* négyzetgyökvonással számíthatók ki.

Példa

Oldjuk meg logarléccel az alábbi egyenletet:

$$x^3 - 7{,}98x + 8{,}38 = 0.$$

A C skála 10-es osztását ráállítjuk a D skála 8,3,8-as osztására; az indexet megfelelő módon elmozgatva, három olyan helyet találunk, ahol az A és B skálán leolvasott értékek összege, illetve különbsége $-p$-t ad. Ezek az értékek rendre a következők:

A skálán 3,47, R skálán 4,51; ezek összege $-p = 7{,}98$. Egyenletünk egyik gyöke tehát $x_1 = \sqrt{3{,}47} = 1{,}86$.

A skálán 1,91, R skálán 6,07; ezek összege: $-p = 7{,}98$. Egyenletünk másik gyöke tehát $x_2 = \sqrt{1{,}91} = 1{,}38$.

A skálán 10,55, R skálán 2,57; ezek különbsége $-p = 7{,}98$. Egyenletünk harmadik gyöke tehát $x_3 = -\sqrt{10{,}55} = -3{,}25$.

Feladat

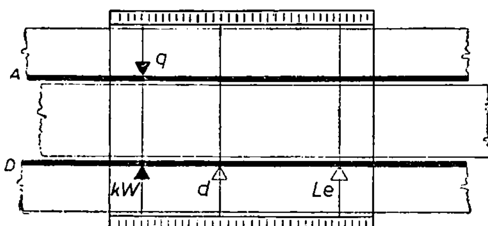
Oldjuk meg logarléccel az alábbi egyenletet:

$$x^3 - 34{,}9x - 41{,}7 = 0.$$

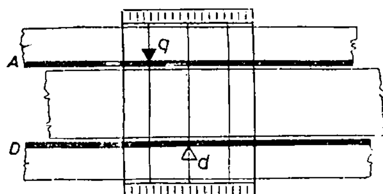
f) Háromindexű futó használata

A *„GAMMA"* normál- és zseblécen, valamint külföldi normállécek legtöbbjén *az ablakon három index*et találunk (1. ábra). Ezen indexek segítségével két feladat oldható meg.

α) A kör területe Körterület-feladatnál „*GAMMA*" normálléc esetében a futó középső és a bal oldali indexét, „*GAMMA*" zsebléc esetében a futó középső és bal oldali vagy a jobb oldali és középső indexét használjuk (95—96.

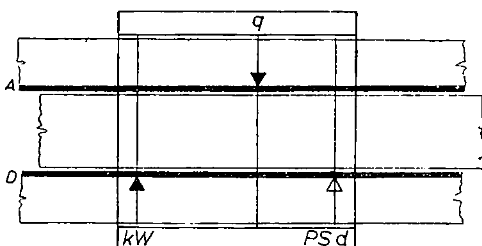


95. *ábra*

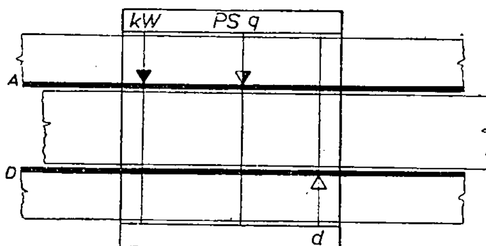


96. *ábra*

ábra). Egyes külföldi léceknél ez a feladat a középső és a jobb oldali index segítségével oldható meg (97—98. ábra).



97. *ábra*



98. *ábra*

A kör területe: $q = \frac{d^2\pi}{4} = d^2 \frac{\pi}{4}$. A számításnál felhasznált két szál távolsága a $\frac{\pi}{4}$ érték logaritmusa a felső osztások léptékében. Ennek alapján a kör területét a „*GAMMA*" lécen a következő *lépések*ben számítjuk:

Az adott d átmérőt a középső indexszel a D skálán beállítjuk.

Leolvassuk a bal oldali index állását az A skálán.

Hasonló módon oldható meg a feladat a B és C skálák felhasználásával is.

A fordított feladat — körterületből az átmérő meghatározása — a most leírt lépések ellenkező sorrendben történő végrehajtásával oldható meg.

Példák

1. Számítsuk ki egy $d = 6{,}2$ cm átmérőjű kör területét!

A D skálán a futó középső indexe segítségével beállítjuk 6,2-t; az A skálán leolvassuk a bal oldali index állását, 3,0,2-t. A kör területe: 30,2 cm².

2. Számítsuk ki egy $q = 2{,}4$ cm² területű kör átmérőjét!

Az A skálán a futó bal oldali indexe segítségével beállítjuk 2,4-et; a D skálán leolvassuk a középső index állását, 1,7,5-öt. A kör átmérője: 1,75 cm.

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő átmérőjű körök területét:

$d = 7{,}25$ cm; $d = 11{,}3$ cm; $d = 25{,}1$ cm.

2. Számítsuk ki a következő területű körök átmérőjét:

$q = 1180$ cm²; $q = 498$ cm²; $q = 7{,}43$ cm².

β) **LE → kW átszámítás** E feladatnál „*GAMMA*" normálléc esetén a két szélső indexet használjuk (95. ábra). Egyes külföldi léceknél ez a feladat a középső és a bal oldali index segítségével oldható meg (97—98. ábra).

*A számítás alapjá*ul az 1 LE = 0,736 kW összefüggés szolgál. Ennek alapján az átszámítást a „*GAMMA*" normállécen a következő *lépések*ben végezzük:

Az adott LE-t a jobb oldali indexszel a *D* skálán beállítjuk.

Leolvassuk a bal oldali index állását a *D* skálán.

Hasonló módon oldható meg a feladat a *C* skála felhasználásával is.

A fordított feladat — kW → LE átszámítás — a most leírt lépések ellenkező sorrendben történő végrehajtásával oldható meg.

Példák

1. Hány kW 5,12 LE?

A *D* skálán a futó jobb oldali indexe segítségével beállítjuk 5,1,2-t; a *D* skálán leolvassuk a bal oldali index állását, 3,7,8-at. Az átszámítás eredménye: 3,78 kW.

2. Hány LE 16,3 kW?

A *D* skálán a futó indexe segítségével beállítjuk 1,6,3-at; a *D* skálán leolvassuk a jobb oldali index állását, 2,2,1-et. Az átszámítás eredménye: 22,1 LE.

Feladatok

1. Számítsuk át az alábbi LE-ket kW-ra:

0,455 LE; 7,65 LE; 10,5 LE.

2. Számítsuk át az alábbi kW-okat LE-re:

0,987 kW; 4,63 kW; 25,4 kW.

g) Különleges jelzések

A logarlécek skáláin bizonyos *speciális számértékek* is elhelyezést nyertek.

ϰ) **$\pi = 3{,}141$** Minden logarléc *A, B, C, D* és *R* skáláján megtalálható. Segítségével *közismert feladatok* (körterület, körkerület, hengerfelszín, gömbköbtartalom) oldhatók meg.

β) | $C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}128$, $C_1 = \sqrt{\frac{4}{10\pi}} = 0{,}357$ és $\frac{1}{C^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}784$. E jelölések arra szolgálnak, hogy *a kör területét az átmérőből és fordítva,* az átmérőt a területből a háromindexű futó használata nélkül is egyszerűen lehessen számítani.* A „*GAMMA*" léceken ezek a jelzések nem találhatók meg. Pótlásukra az előbbi fejezetben részletesen tárgyalt háromindexű futó szolgál.

γ) $M = \frac{100}{\pi}$ | Egyes külföldi léceken külön jelzés mutatja $M = \frac{100}{\pi} = 31{,}83$ értékét. *A kör kerületére* vonatkozó feladatoknál használjuk.

γ) $e = 2{,}718$ | Ez a jelölés az *E* skálán található meg.

ε) |

$$\varrho = \frac{180°}{\pi} = 57{,}3°, \qquad \varrho' = \frac{180 \cdot 60'}{\pi} = 3438',$$

$$\varrho'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi} = 206\,265''.$$

Ezek a jelzések szintén csak a külföldi léceken találhatók meg. (A „*GAMMA*" normállécen látható ϱ jelzés $\frac{\pi}{180} = 0{,}0175$ helyen található.) Ezek a beosztások a sinuskeresés című fejezetben leírtakon kívül a *fok-radián átszámítást* teszik lehetővé.

* $q = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{1}{C^2} d^2 = C.$

7. §. AZ „ELEKTRO"-LOGARLÉC

Az „elektro"-logarlécen feltüntetett *különleges jelzések, illetve skálák* segítségével néhány a villamos iparban gyakori számítás igen egyszerű módon végezhető el.

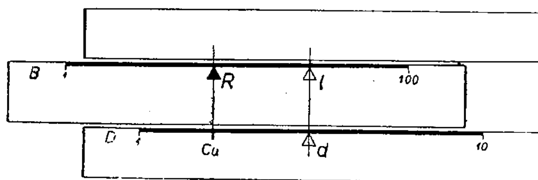
a) Ellenállás-számítás

Kör keresztmetszetű vezető ohmos ellenállását tudvalevőleg az alábbi képlettel számítjuk:

$$R = \varrho \frac{l}{q} = \varrho \frac{l}{\frac{d^2\pi}{4}} = \varrho \frac{4}{\pi} \frac{l}{d^2}.$$

E több lépésből álló számítás lényegesen leegyszerűsödik a léc D skáláján feltüntetett *anyagállandók*ra vonatkozó betűjelzések felhasználásával. A fekete színű „Cu" jelzés a vörösréz, a „B" a bronz, az „A" az alumínium, az „N" a nickelin, az „M" a mangánium stb. huzalok — általában 15 °C hőmérséklet melletti — ohmos ellenállásának számítására szolgál.

A jelzések ismeretében a huzal ellenállását a következő *lépések*ben számítjuk (99. ábra):



99. ábra

A huzal d átmérőjét az index segítségével beállítjuk a D skálán; kikeressük a tolóka B skáláján a huzal l hosszának megfelelő értéket, és ezt az előbb beállított index alá húzzuk.

Ezután az indexet a megfelelő anyagjelzésre (pl. „Cu"-ra) állítjuk. Az index ilyen állása a tolóka B skáláján kijelöli a keresett R ohmos ellenállás értéket.

A nyert számértékek nagyságrendjének meghatározása természetesen a *dimenziók* figyelembevételével történik.

Meg kell jegyeznünk, hogy a fenti számítást ezen egyszerű formában *normállécen* is elvégezhetjük, ha a kérdéses anyagokra vonatkozó $\varrho \frac{4}{\pi}$ állandót előzőleg a logarléc A skáláján bejelöljük.

P é l d á k

1. Mekkora az ohmos ellenállása a d = 2,5 mm átmérőjű, 500 m hosszú vörösréz vezetőnek?

Beállítjuk a D skálán a $d = 2{,}5$ értéket az index segítségével, majd a tolóka B skáláján az $l = 500$ m-nek megfelelő értéket az index alá állítjuk; ezután az indexet az A skála fekete „Cu" jelzésére állítjuk, és az eredményt a B skáláról leolvassuk. Ez jelen esetben $R = 1{,}755\ \Omega$.

2. Mi a hossza a $d = 2$ mm átmérőjű vörösréz vezetőnek, amelynek az ohmos ellenállása 15 °C mellett 1,2 Ω?

Az indexet a D skála „Cu" jelzésére állítjuk, majd a tolóka B skáláján az ellenállás nagyságának megfelelő 1,2 értéket az index alá hozzuk; ezután az indexet az A skálán a vezeték átmérőjének megfelelő 2-es értékre állítjuk, és a B skálán az index által kijelölt 219 m-t leolvassuk.

Feladatok

1. Számítsuk ki a vezeték ellenállását, ha

$d = 1$ mm,	1,5 mm,	2 mm,	5 mm;
$l = 100$ m,	10 m,	206 m,	59 m.

2. Mekkora a vezető hossza, ha

$R = 12\ \Omega$,	1,2 Ω,	6,5 Ω;
$d = 0{,}5$ mm,	1,1 mm,	3 mm.

3. Mekkora a vezető átmérője, ha

$R = 1{,}2\ \Omega$,	4,6 Ω,	21 Ω;
$l = 525$ m,	1060 m,	5220 m.

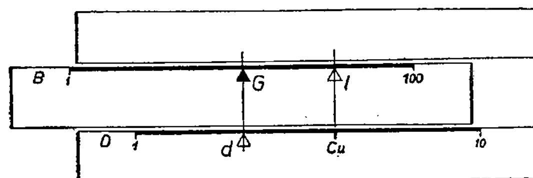
b) Súlyszámítás

Kör keresztmetszetű huzal súlyát a

$$G = \gamma V = \gamma g l = \gamma \frac{d^2\pi}{4} l = \gamma \frac{\pi}{4} d^2 l$$

képlettel számítjuk.

A számítás az ellenállás-számításhoz hasonló módon egyszerűen végezhető a léc D skáláján feltüntetett *anyagállandók* segítségével. Míg az ellenállás-számítás állandói fekete színűek, addig a súlyszámítás állandói általában piros színnel vannak feltüntetve.



100. ábra

A huzal súlyát a következő *lépésekben* számítjuk (100. ábra):

A futó indexét a D skála megfelelő anyagjelzésére (pl. „Cu"-ra) állítjuk.

Kikeressük a tolóka B skáláján a huzal l hosszának megfelelő értéket, és azt az index alá hozzuk.

Ezután az indexet a D skálán kikeresett d huzalátmérő értékére állítjuk, majd az index által a tolóka B skáláján kijelölt értéket leolvassuk. Az index ilyen állása a vezeték G súlyát határozza meg.

A nagyságrend szempontjából a *dimenziók* az ellenállás-számításhoz hasonlóan itt is figyelembe veendők.

A számítást ezen egyszerű formában a *normállécen* is elvégezhetjük, ha a figyelembe veendő anyagokra vonatkozó állandók reciprokait előzőleg a logarléc A skáláján bejelöljük.

Példa

Mi a súlya a $d = 2{,}5$ mm átmérőjű, $l = 120$ m hosszú vörösréz huzalnak?

A futó indexét a piros „Cu" jelzésre hozzuk, majd a tolóka $l = 120$ m hosszúságnak megfelelő értékét az index alá állítjuk; ezután az indexet a D skálának a $d = 2{,}5$ értékére hozzuk, és a tolóka B skálájáról leolvassuk az eredményt, amely jelen esetben $G = 5230$ g.

Fenti beállítás mellett — azonos hosszúság esetén — különböző huzalátmérőkre vonatkozóan az eredményt könnyen leolvashatjuk, csak az indexet kell a D skálán a megfelelő átmérő értékére állítanunk.

Feladatok

Számítsuk ki a vörösréz huzal súlyát az adott d átmérők és l hosszak mellett!

$d = 0{,}5$ mm, 1,5 mm, 2 mm;

$l = 130$ m, 250 m, 300 m.

c) Hatásfok-számítás

Az „elektro"-logarléc tolókájának elhelyezésére szolgáló horony fenekén található felső skála ($\eta = \eta_0$) — egyenáramú, illetve váltakozó áramú $\cos\varphi = 1$ terhelés melletti — *villamos gépek hatásfoká*nak kiszámítására szolgál. A skála bal oldala a 100-as osztásig a generátorok (dinamó), 100-tól jobbra eső szakasza pedig a motorok hatásfokának megállapítására szolgál.

A villamos gépek hatásfokát az $\eta = \frac{P_2}{P_1}$ képlettel számítjuk, ahol P_1 a *felvett teljesítmény*, P_2 a *leadott teljesítmény*. Generátoros üzem esetén a P_1, motoros üzem (PS) esetén pedig a P_2 teljesítmény általában LE-ben adott. Így tehát az η skála az egymással szembeállított értékek egyikének kW → LE átszámítását az osztással együtt végzi el. A számítás megkönnyítése érdekében a léc A skálájának jobb oldalán a kW, a tolóka B skálájának jobb szélén pedig a PS (LE) jelzés van feltüntetve.

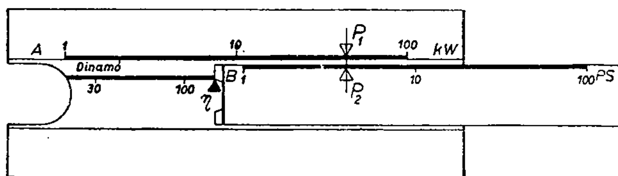
A feladat ezek után a következő:

Meghatározandó egy motor hatásfoka (η), ha a felvett teljesítménye P_1 (kW), a tengelyén leadott teljesítménye pedig P_2 (LE).

A feladat megoldását a következő *lépésekben* végezzük el (101. ábra):

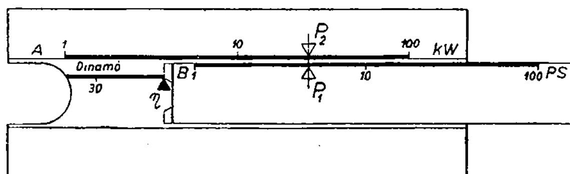
Beállítjuk a futó indexét az A skálán a P_1 (kW) felvett teljesítménynek megfelelő értékére.

Kikeressük a tolóka B skáláján a motor által leadott P_2 (LE) teljesítmény értékét, és azt az index alá állítjuk.



101. ábra

Az eredményül kapott η hatásfok értéket pedig a tolóka bal oldalába beépített fémnyelv segítségével olvassuk le a hatásfokskáláról.



102. ábra

Megjegyzendő, hogy a P_1 és P_2 teljesítményértékek beállításai az A és B skálák azon részein végzendők el, hogy egymással szembeállítva, a tolóka fémnyelve a hatásfokskála 100-as jelű osztásától mindig jobbra, vagyis a motoros üzemnek megfelelő oldalra essék.

A generátoros üzem hatásfoka a fentiek és a 102. ábra alapján nehézség nélkül meghatározható.

Példa

Egy dinamó tengelyén felvett teljesítmény 124 LE, a leadott teljesítmény pedig 80 kW. Mi a dinamó hatásfoka?

Beállítjuk az A skála 10—100 osztásai között a $P_2 = 80$ kW leadott teljesítmény értéket az index segítségével; a tolóka B skálája 10—100 osztásai között kikeressük a $P_2 = 124$ LE megfelelő számértékét, és azt az index alá állítjuk. Végül a tolóka bal oldalán a fémnyelv segítségével a hatásfokskáláról leolvassuk az eredményt, amely jelen esetben $\eta = 88\%$.

Feladatok

1. Mi a hatásfoka annak a motornak, amely 70 kW felvett teljesítmény mellett 90 LE teljesítményt ad le?
2. Egy dinamó tengelyén felvett teljesítmény 30 LE, hatásfoka 89%. Mi a leadott villamos teljesítménye?
3. Hány LE a leadott teljesítménye annak az egyenáramú motornak, amely 220 V feszültség mellett 20 A-t vesz fel és hatásfoka $\eta = 86\%$.

d) Feszültségesés-számítás

Az „elektro"-logarléc tolókájának elhelyezésére szolgáló horony fenekén található — „Volt" jelzésű — alsó skála a *feszültségesés meghatározására* alkalmas. Ennek segítségével vörösréz vezető esetén az egyenáram, illetve indukciómentes vezeték mellett a váltakozó áram által okozott feszültségesés könnyen meghatározható.

A számítás alapja az

$$e = IR = I\varrho\frac{l}{q} = \frac{1}{c}\frac{Il}{q}$$

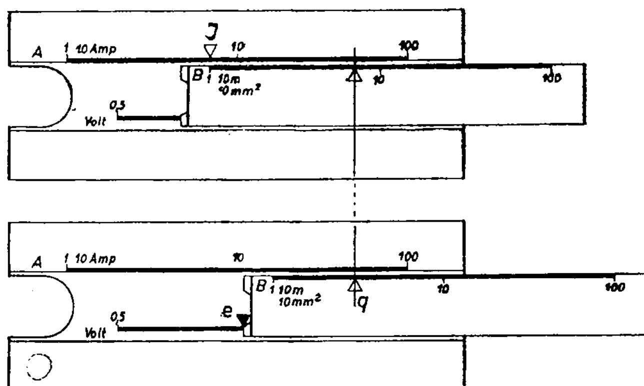
összefüggés. A képletben c a vörösréz fajlagos vezetőképessége, q a vezető keresztmetszete, l a vezető hossza.

A gyakorlatban előforduió lécek feszültségesési skálái általában *egyszeres vezetékekre* vonatkozó értékeket tüntetnek fel. Egyes léceken kettős vezetékre vonatkozó értékek találhatók. Ezért ezt a skálát a számítás megkezdése előtt meg kell vizsgálni, és ennek megfelelően l, illetve $\frac{l}{2}$ valóságos vezetékhosszal kell számolni.

A feladat ezek után a következő:

meghatározandó az I áramerősséggel terhelt, q keresztmetszetű, l hosszúságú vezetéken jelentkező e feszültségesés.

A feladat megoldását a következő *lépésekben* végezzük el (103. ábra):



103. ábra

A léc A skáláján kikeresett I áramerősségnek megfelelő érték alá állítjuk a tolóka B skálájának kezdő osztását.

A tolóka B skáláján az l hosszúságnak megfelelő érték fölé hozzuk az indexet.

Végül a tolókát elmozgatva, az index alá állítjuk a q keresztmetszetnek megfelelő értéket, és a tolóka fémnyelve által kijelölt e feszültségesés értéket a „Volt"-osztásról leolvassuk.

A feszültségesés nagyságrendje csak akkor egyezik meg a skálán feltüntetett értékkel, ha a beállítás során az A skála kezdő osztása a lécen feltüntetett 10 A értékű, továbbá a B skála kezdő osztása 10 m, illetve 10 mm^2 kiindulási alapul szolgált.

P é l d a

Számítsuk ki egy 80 A-rel terhelt vörösréz vezetőn adódó feszültségesést. A vezető hossza 90 m, keresztmetszete pedig 50 mm^2.

A léc *A* skáláján a kezdő osztás 10 A, tehát a jelen esetben az $I = 80$ A érték a 8-as számnál lesz, amely alá beállítjuk a *B* skála kezdő osztását; a *B* skálán kikeressük az $l = 90$ m-nek megfelelő osztást. Tekintve, hogy a kezdő osztás 10 m-t jelent, ezért a 90 m-nek megfelelő osztás a 9-es számnál lesz, amelyre ráállítjuk az indexet. Ezután a *B* skálán a 10 mm^2 kiindulási érték figyelembevételével megkeressük a $q = 50$ mm^2-nek megfelelő 5-ös számú osztást, és azt az index alá állítjuk. A végeredményt pedig a tolóka fémnyelve segítségével a „Volt”-osztásról olvassuk le. Ez a jelen esetben $e = 2{,}49$ V.

Ha a fenti példánál 900 m hosszú vezetéket kellett volna számításba venni, akkor 90 m hosszal számoltunk volna és az eredményt 10-zel szoroztuk volna (24,9 V).

Ha pedig 0,8 A-t kellett volna az eredeti példánál figyelembe venni, akkor 80 A-rel számoltunk volna, és az eredményt osztottuk volna 100-zal (0,0249 V).

Feladat

Kiszámítandó a vörösréz feszültségesése, ha

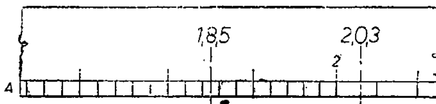
$I = 20$ A,	8 A,	200 A;
$q = 10$ mm^2,	1,5 mm^2,	95 mm^2;
$l = 150$ m.	20 m,	2000 m.

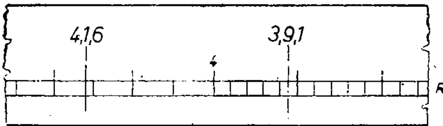
EREDMÉNYTÁR

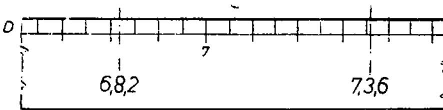
1. §. A LOGARLÉCRŐL ÁLTALÁBAN

a) Logarléc beállítása és leolvasása

1. L. a 104. és 105. ábrát!
3. 7,9.1.
4. 3,6,1.
5. 1,5,4.
6. 7,3,3.

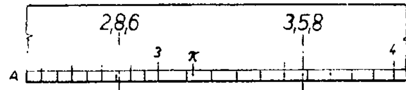


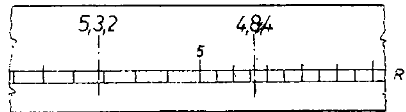


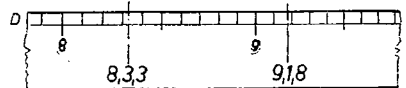


nagy logarléc

104. ábra







zseb-logarléc

105. ábra

2. §. SZORZÁS, OSZTÁS LOGARLÉCCEL

b) Szorzás

α

1. 19 930.
2. 0,016 38.
3. 104,4.
4. 3 715 000.

β

1. 108,5.
2. 4 340 000.
3. 0,000 006 12.
4. 47 900 000.

c) Osztás

α

1. 0,867.
2. 18 720.
3. 0,0588.
4. 0,000 000 3575.

β

1.	0,827.	3.	0,000 0813.
2.	15 360.	4.	118,9.

d) Szorzás és osztás elvégzése a reciprok skála felhasználásával

α

1.	363 500.	3.	9 245 000.
2.	0,009 42.	4.	0,000 018 69.

β

1.	0,717.	3.	845 000.
2.	200.	4.	0,010 89.

3. §. NÉGYZETRE ÉS KÖBRE EMELÉS, NÉGYZET- ÉS KÖBGYÖKVONÁS LOGARLÉCCEL

a) Négyzetre emelés

1.	169 000	3.	0,000 0386.	5.	1,165.
2.	72,4.	4.	864.	6.	0,000 000 0605.

b) Négyzetgyökvonás

1.	6,4.	3.	0,316.	5.	0,004 58.
2.	0,843.	4.	944.	6.	0,0593.

c) Köbre emelés

1.	467.	3.	0,0911.	5.	0,000 007 76.
2.	160 000.	4.	1 440 000.	6.	0,000 000 000 000 000 705.

d) Köbgyökvonás

1.	43,8.	3.	9,43.	5.	0,1174.
2.	20,3.	4.	0,005 14.	6.	188,7.

4. §. TRIGONOMETRIKUS MŰVELETEK LOGARLÉCCEL

b) Sinuskeresés

1.	0,135.	3.	0,749.	5.	0,0576.
2.	0,956.	4.	0,1132.	6.	0,004 36.

c) Arcussinus-keresés

1.	19,9′.	3.	1° 9′.	5.	4° 4′.
2.	25° 30′.	4.	56° 10′.	6.	6,2′.

d) Cosinuskeresés

1.	0,998 13.	3.	0,002 91.	5.	0,9995.
2.	0,613.	4.	0,316.	6.	0,703.

e) Arcuscosinus-keresés

1.	82° 56′.	3.	89° 41,25′.	5.	89° 4′.
2.	84° 36′.	4.	47° 5′.	6.	89° 51,34′.

f) Tangenskeresés

1.	0,461.	3.	12,25.	5.	0,008 15.
2.	0,0437.	4.	344.	6.	1,167.

g) Arcustangens-keresés

1.	17,9′.	3.	32° 35′.	5.	89° 22,9′.
2.	3° 1,5′.	4.	62° 32′.	6.	89° 42,8′.

h) Cotangens-keresés

1.	18,07.	3.	1,137.	5.	0,0437.
2.	246.	4.	0,265.	6.	0,001 455.

i) Arcuscotangens-keresés

1.	89° 25,62′.	3.	10° 28′.	5.	23° 19′.
2.	84,27°.	4.	34,38′.	6.	3,438′.

5. §. LOGARITMIKUS MŰVELETEK LOGARLÉCCEL

a) Logaritmus- és hatványkeresés

1.	0,75.	4.	0,009 62.	7.	1,483.
2.	−1,292.	5.	14,80.	8.	−0,339.
3.	1,083.	6.	288 000.	9.	1,227.

c) Műveletek lglg skálával

α	1°.	1.	2,89.	2.	18,0	3.	165 700.
	2°.	1.	164.	2.	2,655.	3.	1,01.
	3°.	1.	1,246.	2.	11,1.	3.	347.
β	1°.	1.	1,0382.	2.	2,295.	3.	0,849.
	2°.	1.	1,221.	2.	1,0317.	3.	1,1535.
	3°.	1.	1,395.	2.	1,0727.	3.	1,017.
γ	1°.	1.	4,74.	2.	0,1735.	3.	12,41.
	2°.	1.	2,98.	2.	2,63.	3.	6,69.
δ		1.	101,7.	2.	0,917.	3.	1,149.

6. §. KÜLÖNLEGES MŰVELETEK LOGARLÉCCEL

a) Ismételt szorzás, osztás

1.	1,886.	4.	76,9.
2.	233 500 000.	5.	1263.
3.	2,92.		

b) Négyzetre emeléssel kapcsolatos összetett műveletek

1.	136,6.	5.	0,000 16.	9.	3,59.
2.	0,004 68.	6.	0,000 196.	10.	30,75.
3.	0,000 0022.	7.	0,002.	11.	16 800 000.
4.	11 430 000.	8.	66,3.	12.	0,1375.

c) Négyzetgyökvonással kapcsolatos összetett műveletek

1.	5,54.	5.	0,000 1523.	9.	49,9.
2.	173,6.	6.	0,025 64.	10.	0,797.
3.	100.	7.	0,442.	11.	13,68.
4.	0,003 92.	8.	0,011 86.		

d) Trigonometrikus értékekkel kapcsolatos összetett műveletek

1.	0,666.	4.	207.	7.	31,2.
2.	3040.	5.	2,095.	8.	0,0529.
3.	0,004 99.	6.	5,265.		

e) Trinom egyenletek megoldása logarléccel

α	1.	$x_1 = 8{,}28$;	2.	$x_1 = 15{,}35$;	3.	$x_1 = -51{,}25$.
		$x_2 = 2{,}62$;		$x_2 = -1{,}85$;		$x_2 = -1{,}46$.
β		$x_1 = -1{,}25$;		$x_2 = 6{,}42$;		$x_3 = -5{,}18$.

f) Háromindexű futó használata

α 1. $q = 41{,}3$ cm², 100 cm², 495 cm². 2. $d = 38{,}75$ cm, 25,15 cm, 30,8 cm

β 1. 0,334 kW, 5,63 kW, 7,73 kW. 2. 1,341 LE, 6,29 LE, 34,5 LE.

7. §. AZ „ELEKTRO”-LOGARLÉC

a) Ellenállás-számítás

1.	2,195 Ω	0,0974 Ω,	1,130 Ω,	0,0517 Ω.
2.	1369 m,	6,61 m,	267 m.	
3.	3,1 mm,	2,25 mm,	2,33 mm.	

b) Súlyszámítás

227 p; 3920 p; 8360 p.

c) Hatásfok-számítás

1. $\eta = 94\%$. 2. 19,6 kW. 3. 5,17 LE.

d) Feszültségesés-számítás

1. 5,2 V, 0,0184 V, 73 V.

IRODALOMJEGYZÉK

1. *Oltay:* Geodézia. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.)
2. *Bjezikovics:* Közelítő számítások. (Tankönyvkiadó, 1952.)
3. *Fricke:* Der Rechenschieber. (Fachbuchverlag, Leipzig, 1952.)
4. *A. Rohrberg:* Theorie und Praxis des logaritmischen Rechenstabes. (B. G. Teubner, Leipzig, 1951.)
5. *Meyer zur Capellen:* Mathematische Instrumente. (Akademische Verlaggesellschaft, Leipzig, 1949.)
6. *H. v. Sanden:* Mathematisches Praktikum, I. Teil. (B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1927.)
7. *Sanden:* Praktische Mathematik. (B. G. Teubner, 1951.)
8. *Fr. A. Willers:* Methoden der praktischen Analysis. (Walter de Gruyter & Co, Berlin—Leipzig, 1928.)
9. *Zurmühl, R.:* Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. (Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.)



Rakt. sz.: 44131/A. X,*

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: Vágvölgyi Tibor igazgató
Kiadásra előkészítette: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Gonda Pál
Műszaki szerkesztő: Simányi Hugó
A kézirat nyomdába érkezett: 1964. október hó — Megjelent: 1965. január hó
Féldányszám: 2100 — Terjedelem: 7,25 (A/5) ív + 4 tábla
Készült: az 1964. évi harmadik kiadás alapján, íves magasnyomással,
az MSZ 5601-59 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint
64.6189 Egyetemi Nyomda, Budapest